Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

25.04.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung mit inhomogenen Robin-Randbedingungen

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u + u = g \quad \text{auf } \Gamma, \tag{$*$}$$

wobei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\Gamma)$ vorausgesetzt sind. Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) u ist Lösung von $(*)$.

(b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) \mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma uv \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma gv \, \mathrm{d}\sigma$$

für alle $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] \mathrm{d}(x,y) + \frac{1}{2}\int_\Gamma v^2 \, \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega fv \, \mathrm{d}(x,y) - \int_\Gamma gv \, \mathrm{d}\sigma = \min!$$

unter allen $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

Hinweis: Sie benötigen für diese Aufgabe das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Aufgabe 3) weiterhin mit $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, aber diesmal Testfunktionen $g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Aufgabe 14:

(a) Bestimmen Sie für die Dreiecke aus Abbildung 1 die linearen Basisfunktionen, die jeweils auf einer Ecke den Wert 1, auf den anderen beiden den Wert 0 annehmen.

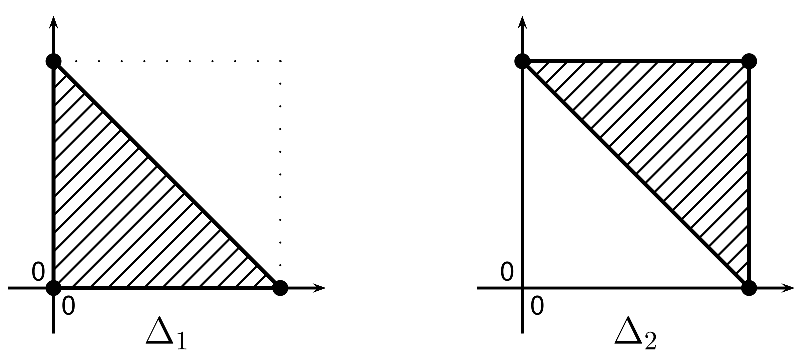

Abbildung 1: Dreiecke Δ_1 und Δ_2

(b) Bestimmen Sie für $\Omega = \Delta_1$ die (3×3)-Steifigkeitsmatrix $A = \big(a(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{i,j}$ für die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

b.w.

Aufgabe 15:

Sei Ω ein Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $C(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $C^1(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Wenn Sie möchten, können Sie für die Konstruktion Ihrer Gegenbeispiele annehmen, dass Ω ein reelles Intervall ist.

Aufgabe 16:

In dieser Aufgabe werden wir mit Hilfe des Programms NETGEN dreidimensionale Geometrien bearbeiten und erstellen. Den Link zur Installationsanleitung von NGS-Py (bzw. NETGEN/NGSOLVE) finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(a) Lesen Sie sich das Kapitel "Constructive Solid Geometry" in der NETGEN-Dokumentation von Joachim Schöberl durch, die unter https://github.com/NGSolve/netgen/blob/master/doc/ng4.pdf zu finden ist. Sehen Sie sich außerdem die `.geo`-Beispiele unter .../netgen/tree/master/tutorials in der NETGEN-GUI und in einem Texteditor an.

   Hinweis: Die `.geo`-Dateien wurden auch bei der Installation mit abgespeichert. Die Pfade, unter denen sie zu finden sind, stehen auf der NGS-Py-Seite unter "Getting started with NETGEN/NGSOLVE".

(b) Erstellen Sie nun die folgenden Geometrien, indem Sie vorhandene Beispiele ändern oder neue `.geo`-Dateien schreiben:

   (i) den Quader $[-1,1] \times [0,1] \times [1.5,2]$ auf zwei verschiedene Arten, d.h als Schnitt von sechs Ebenen und direkt mit nur einem Befehl,

   (ii) den Würfel $[0,1]^3$ ohne den kleinere Würfel $[0.25,0.75]^2 \times [0.5,1]$ (das Beispiel `fichera.geo` ist hier hilfreich),

   (iii) zwei ineinander verschlungene Tori (wie zwei Glieder einer Kette),

   (iv) eine quadratische Pyramide mit Grundfläche $[-1,1]^2$ und Höhe 1,

   (v) eine Tasse, natürlich befüllbar und mit einem Henkel.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 04.05.2023.