Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

18.04.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Für $\Omega = (0,1)^2$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Geben Sie die Matrix A und den Vektor b aus dem linearen Gleichungssystem

$$Ax = b$$

an, welches aus der Finite Differenzen Approximation obiger Gleichung mit einem regelmäßigen Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$ hervorgeht.

Aufgabe 10:

Beweisen Sie das diskrete Vergleichsprinzip, Korollar 3.3, aus der Vorlesung.

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie, dass die lokale Approximation des Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen durch den 5-Punkte-Stern die Konsistenzordnung 2 hat, d.h. dass die folgende Gleichung gilt:

$$\partial_{xx}u(x,y)+\partial_{yy}u(x,y) = \frac{-4u(x,y) + u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

(b) Zeigen Sie, dass das kompakte Finite Differenzen Verfahren zur Approximation von $\partial_{xx}u(x)$

$$u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) \approx \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x-h) + \frac{5h^2}{6}\partial_{xx}u(x) + \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x+h)$$

die Konsistenzordnung 4 hat.

b.w.

Aufgabe 12:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) - q(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega := (a,b) \\ \quad u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

(a) Implementieren Sie eine Funktion `fd02(f,q,N,a,b)`, die mittels einer zentralen Finite Differenzen Approximation der zweiten Ableitung eine approximative Lösung `u` von Gleichung $(*)$ auf einem äquidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

(b) Implementieren Sie eine Funktion `fd04(f,q,N,a,b)`, die mittels des kompakten Finite Differenzen Verfahrens aus Aufgabe 11(b) eine approximative Lösung `u` von $(*)$ auf einem äquidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

Hierbei sind `f` und `q` jeweils (Python)-Funktionen zur Auswertung von f und q und `a` und `b` die Randpunkte des Intervalls Ω.

(c) Testen Sie beide Funktionen an dem Beispiel

$$\begin{cases} -u''(x) - (1+4x^2)u(x) = 2\sin(x^2)\,(2\cos(x)x + \sin(x)) & \forall x \in (0,\pi) \\ \quad u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

dessen exakte Lösung durch $u(x) = \sin(x)\cos(x^2)$ gegeben ist und vergewissern Sie sich, dass Sie die in Aufgabe 11 berechneten Konsistenzordnungen erhalten.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 27.04.2023.