Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5: (EULER, 1779)

Sei das Variationsintegral

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}x$$

auf

$$\mathcal{V} := \left\{ u \in \mathrm{PC}^1\,[0,1] \;\middle|\; u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

gegeben, wobei PC^1 der Raum der stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktionen ist.

(a) Raten Sie einen Minimierer u^* für $\mathcal{J}$.
Tipp: $\mathcal{J}(u^*) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Auf der kleineren Variationsklasse $\mathcal{V}^1 := \mathcal{V} \cap C^1[0,1]$ ist das Infimum des Funktionals immer noch 0, es wird allerdings von keiner C^1-Funktion angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) Ihre Lösung aus (a), um eine Folge von stetigen Funktionen zu basteln. Hier kann das Newton-Schema helfen.

Aufgabe 6:

Sei $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel um den Ursprung mit Radius 1 und D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1/2, 0)$ und $(0, 1/2)$. Durch $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{\sim} \varphi(D) \subset \mathbb{S}_2$ mit

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \; \frac{(1-u^2)2v}{(1+u^2)(1+v^2)}, \; \frac{2u(1+v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \right)^T$$

sei eine Karte von $\mathbb{S}_2$ gegeben.
Berechnen Sie für $f : \mathbb{S}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$, das Integral

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y,z) \; \mathrm{d}S(x,y,z).$$

Hinweis: Sie können die notwendigen Berechnungen per Python, Maple, etc. durchführen. Geben Sie aber die Jacobimatrix $\mathrm{D}\varphi$, die Matrix $G = (g_{ij})_{i,j=1}^2$ sowie deren Determinante g an.

Aufgabe 7:

Beweisen Sie die Green'schen Formeln aus der Vorlesung:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

und

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u - u\partial_\nu v \,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$, dem äußeren Normalenvektorfeld $\vec{\nu} : \Gamma \to \mathcal{S}^n$ und der äußeren Normalenableitung $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$.

Welche Voraussetzungen benötigen Sie um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können?

Aufgabe 8:

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| < 1,\ x < 0 \text{ oder } 0 < y\} \subseteq \mathbb{R}^2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{C}$.

Überlegen Sie sich, dass $u(x,y) \mathrel{\widehat{=}} u(x+iy) = \mathrm{Im}(w(z)) = \mathrm{Im}(z^{2/3})$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(e^{i\varphi}) = \sin(\frac{2}{3}\varphi), & \varphi \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ u = 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass ∇u auf Ω nicht beschränkt ist.

Besprechung in der Übung am Mittwoch, 19.04.2023.