Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

04.07.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 14. Übungsblatt

[wahr | falsch]

Aufgabe 53: (I. Elliptische partielle Differentialgleichungen)

1. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert aus einer Integralgleichung eine punktweise Gleichheit. [|]

2. Der 5-Punkte-Stern zur Approximation des Laplace-Operators hat Konsistenzordnung 2. [|]

3. Der 5-Punkte-Stern zur Approximation des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen liefert auf Polygonen eine positiv definite Matrix. [|]

4. Der kompakte 9-Punkte-Stern zur Approximation des Laplace-Operators hat Konsistenzordnung 2. [|]

5. Gilt $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (beschränktes, offenes Gebiet) für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u = g$ auf Γ, so folgt $\max_{x\in\Omega} u(x) = \max_{x\in\Gamma} g(x)$. [|]

6. Gilt $\Delta_h u_h \leq \Delta_h v_h$ in Ω_h, $u_h \leq v_h$ auf Γ_h, so folgt $u_h(x) \leq v_h(x)$ in ganz Ω_h. [|]

7. Der Laplace-Operator ist invariant unter Verschiebungen. [|]

8. Das Argument des Minimums von $J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$ über alle $v \in V$ existiert für jeden beliebigen Vektorraum V. [|]

9. Die Galerkinapproximation u_N hat in der Energienorm unter allen Elementen von V_N, wobei V_N endlich dim. UR vom Hilbertraum V ist, den kleinsten Fehler. [|]

Aufgabe 54: (II. Variationelle Formulierung elliptischer Randwertprobleme)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein stw. C^1- berandetes Gebiet, d.h. Ω ist insbesondere offen und beschränkt.

1. Jede klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung. [|]

2. Ist die Bilinearform eines Randwertproblems V-elliptisch, so existiert eine eindeutige schwache Lösung. [|]

3. Eine hinreichend glatte schwache Lösung ist auch eine klassische Lösung. [|]

4. Eine hinreichend glatte klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung. [|]

5. $H_0^1(\Omega)$ ist vollständig bezüglich der H^1-Norm. [|]

6. Für eine Cauchyfolge $(v_n)_n \to v$ in $H^1(\Omega)$ gilt $(v_n)_n \to v$ und $(\partial_i v_n)_n \to \partial_i v$ in $L^2(\Omega)$ für alle i. [|]

7. $C^1(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$. [|]

8. Die Einbettung $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ ist stetig. [|]

9. $H^1(\Omega)$-Funktionen besitzen eine Spur in $L^2(\partial\Omega)$. [|]

10. Es gibt eine von Ω abhängige Konstante C so, dass für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $\|u\|_{1,\Omega} \leq C|u|_{1,\Omega}$. [|]

11. Auf $H_0^1(\Omega)$ sind die H^1-Seminorm und die H^1-Norm äquivalent. [|]

12. Die Dirichletbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ geht in den Lösungsraum ein. [|]

13. Die Neumannbedingung $\partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$ geht in den Lösungsraum ein. [|]

Aufgabe 55: (III. Finite Elemente Approximation)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2$ oder $d = 3$, ein Polygon oder Polyeder.

1. Eine Triangulierung von Ω ist eine nichtüberlappende Zerlegung des Gebiets in endlich viele Dreiecke. [|]

2. Für einen k-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{P}$ und eine Basis $\{N_1, \dots, N_k\}$ von $\mathcal{P}'$ gibt es für jedes N_i einen Punkt x_i, so dass $N_i(p) = p(x_i)$ für alle $p \in \mathcal{P}$. [|]

3. Sei $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$ ein finites Element, so gilt $\dim(\mathcal{P}) = |\Sigma|$. [|]

4. Die Linearform ℓ bei einem gemischten Randwertproblemen mit homogenen Dirichlet-RB auf Γ_0 und inhomogenen Neumann-RB auf Γ_1 (mit $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$) unterscheidet sich von der mit homogenen Dirichlet-RB auf Γ_0 und homogenen Neumann-RB auf Γ_1. [|]

5. Die Steifigkeitsmatrix aus Aufgabe 17 ist kleiner als die Steifigkeitsmatrix, die sich mit den Voraussetzungen aus Aufgabe 17 für die Differentialgleichung $-\Delta u = f$ in $\Omega,\ u = 0$ auf Γ ergibt. [|]

6. Die Steifigkeitsmatrix aus Aufgabe 17 ist kleiner als die Steifigkeitsmatrix, die sich mit den Voraussetzungen aus Aufgabe 17 für die Differentialgleichung $-\Delta u = f$ in $\Omega,\ \partial_\nu u = g \neq 0$ auf Γ ergibt. [|]

7. Der Interpolationsfehler wird auf dem Referenzelement kontrolliert. [|]

8. Die Einbettung von $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$ ist für $m > k$ kompakt. [|]

9. Besitzt ein elliptisches RWP $a(u, v) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\ \forall v \in V$ eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ für jedes $f \in L^2(\Omega)$, so ist es H^2-regulär. [|]

Aufgabe 56: (IV. Iterative Verfahren)

Die Fragen 1 bis 4 beziehen sich auf das Modellproblem (Poissongleichung auf dem Einheitsquadrat mit kartesischem Gitter) aus der Vorlesung.

1. Zusätzlich zu den Quadraten der Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix ist Null ein weiterer Eigenwert der Gauß-Seidel-Iterationsmatrix. [|]

2. Das relaxierte Jacobi-Verfahren mit $\omega = 1/2$ dämpft hochfrequente Fehlerkomponenten stärker als niederfrequente. [|]

3. Das Gauß-Seidel-Verfahren dämpft hochfrequente Fehlerkomponenten stärker als niederfrequente. [|]

4. Das Jacobi-Verfahren konvergiert schneller als das Gauß-Seidel-Verfahren. [|]

5. Beim Mehrgitterverfahren löst man das lineare Gleichungssystem auf dem feinsten Gitter exakt. [|]

6. Für die Grobgitterkorrektur löst man mit dem restringierten Residuum/Defekt auf dem feineren Gitter als rechter Seite. [|]

7. Zur Konvergenzanalyse von Mehrgitterverfahren benötigt man eine Glättungs- und eine Approximationseigenschaft. [|]

8. Die Iteration $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \omega(b - A\mu^{(k)})$ konvergiert, falls sie konvergiert, gegen eine Lösung von $A\mu = b$. [|]

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 13.07.2023.