Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

27.06.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 13. Übungsblatt

Aufgabe 49:

Sei $A \in \mathcal{L}(X)$, D ein zusammenhängendes Gebiet, das im Inneren die Eigenwerte von A enthält und Γ eine Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn den Rand von D parametrisiert. Zeigen Sie

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A) \,\mathrm{d}\lambda.$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Resolvente in eine Neumann'sche Reihe und benutzen Sie dann eine Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel für höhere Ableitungen.

Aufgabe 50:

Sei $X = C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, K \subseteq \mathbb{R} \text{ kompakt mit } |f(s)| < \epsilon \text{ für } s \in \mathbb{R}\backslash K\}$ versehen mit der Supremumsnorm. Für festes $\alpha > 0$ definiere den Operator A_α als den Differenzenquotienten

$$A_\alpha f(s) := \tfrac{1}{\alpha}(f(s+\alpha) - f(s)), \qquad f \in X,\ s \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|A_\alpha\| \leq 2/\alpha$, und daher

$$\|\exp(tA_\alpha)\| \leq \exp(t\,\tfrac{2}{\alpha}) \qquad \forall\, t > 0.$$

gilt. Zeigen Sie weiter, dass $\exp(tA_\alpha)$ explizit als

$$\exp(tA_\alpha)f(s) = \exp(-\tfrac{t}{\alpha}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{\alpha})^k}{k!} f(s + k\alpha), \quad f \in X,\ s \in \mathbb{R}$$

angegeben werden kann und daher die viel bessere Bedingung

$$\|\exp(tA_\alpha)\| = 1.$$

erfüllt.

Aufgabe 51:

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \Delta_x u(x,t) && \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \partial_\nu u(x,t) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma := \partial\Omega,\ t \in (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega \end{aligned}$$

auf $H = L^2(\Omega)$.

(a) Geben Sie die schwache Formulierung an. Welcher Raum V ist der geeignete Grundraum? Wie sieht die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ aus und ist sie V- elliptisch?

(b) Zeigen Sie, dass die Bilinearform a aus Teil a) die Gårdingungleichung

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - c\,\|u\|_H^2$$

erfüllt. Können Sie α und c konkret angeben?

b.w.

Aufgabe 52:

Zeigen Sie, dass, falls die Bilinearform a in der schwachen Formulierung einer parabolischen Gleichung

$$\partial_t(u,v)_H + a(u,v) = (f,v)_H, \quad \forall v \in V$$

anstelle der V-Elliptizität nur die Gårdingungleichung erfüllt, die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen der Vorlesung weiterhin gelten. Wie sieht nun die Abschätzung für die Lösung u aus?

Hinweis: Betrachten Sie ein äquivalentes Problem mit Lösung $w(t) = \mathrm{e}^{-ct}u(t)$ und zeigen Sie für die dazu gehörige Bilinearform die V-Elliptizität.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 06.07.2023.