Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

20.06.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 45:

Sei A symmetrisch und positiv definit. Überlegen Sie sich, für welche θ die Richardson-Iteration

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A)x^{(k)} + \theta b$$

gegen $\widehat{x} = A^{-1}b$ konvergiert.

Aufgabe 46:

Sei $L > 0$ ein festes feinstes Level und sei $u_L^{(k)} \mapsto u_L^{(k+1)}$ ein Schritt des Mehrgitterverfahrens. Mehrgitterverfahren sind lineare Iterationen, d. h. es gibt eine Iterationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$, so dass für den Fehler $e_L^{(k)} = u_L - u_L^{(k)}$ gilt $e_L^{(k+1)} = G\, e_L^{(k)}$.

(a) Geben Sie die Iterationsmatrix G für das Zweigitterverfahren (also $L = 1$) explizit an. Gehen Sie dabei den Zweigitteralgorithmus Schritt für Schritt durch, wobei Sie folgendes beachten:

  (i) Verwenden Sie ν_1 Schritte des gedämpften Jacobi-Verfahrens als Vorglätter, dessen Iterationsmatrix durch $S := I - \omega D^{-1}A$ gegeben ist (vgl. Beobachtung (1.7)). Zeigen Sie hierbei, dass mit $u = A^{-1}b$ gilt

  $$\mathcal{L}_\omega^{\nu_1} u^{(k)} = S^{\nu_1} u^{(k)} + (I - S^{\nu_1})u,$$

  wobei die Abbildung $\mathcal{L}_\omega$ einen Glättungsschritt mit obigem Verfahren darstellt.

  (ii) Führen Sie nach der Korrektur (Schritt 4) noch eine Nachglättung des Ergebnisses durch, d.h. glätten Sie Ihr Ergebnis am Ende mit ν_2 Schritten des gedämpften Jacobi-Verfahrens.

(b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Spektralradius von G nur von der Summe der Glättungsschritte $\nu_1 + \nu_2$ abhängt, nicht aber von der Anzahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte (ν_1 bzw. ν_2) einzeln.

Aufgabe 47:

Es sei ρ_l der Reduktionsfaktor für den W-Zyklus mit $l+1$ Ebenen in der Energienorm, d.h. ρ_l ist der kleinste Wert, für den in der Iteration auf dem l-ten Gitter

$$\|u_{h_l}^{(1)} - u_{h_l}\|_a \leq \rho_l \|u_{h_l}^{(0)} - u_{h_l}\|_a$$

gilt.
Zeigen Sie, dass

$$\sup_l \rho_l^2 \leq \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

gilt, sofern $\rho_1 \leq 1/2$ erfüllt ist.

Hinweise: Das ρ_l hier ist nicht das selbe wie in der Vorlesung (hier: Energienorm!).
Zeigen Sie zuerst die Abschätzung

$$\rho_l^2 \leq \rho_1^2 + \rho_{l-1}^4(1-\rho_1^2).$$

Hierfür können Sie die folgenden Gleichungen ohne Beweis verwenden (Notation aus Lemma (7.2)):

$$\|\widetilde{u}_{h_l}^{(1)} - u_{h_l}\|_a^2 + \|\widetilde{u}_{h_l}^{(1)} - \overline{u}_{h_l}\|_a^2 = \|\overline{u}_{h_l} - u_{h_l}\|_a^2$$
$$\|\widetilde{u}_{h_l}^{(1)} - u_{h_l}\|_a^2 + \|u_{h_l}^{(1)} - \widetilde{u}_{h_l}^{(1)}\|_a^2 = \|u_{h_l}^{(1)} - u_{h_l}\|_a^2$$

Aufgabe 48:

Seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$ stetige, kommutierende Operatoren, d.h. $AB = BA$. Zeigen Sie

(a) $BR(\lambda, A) = R(\lambda, A)B \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A)$,

(b) $R(\lambda, A)R(\mu, B) = R(\mu, B)R(\lambda, A) \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(B)$,

(c) $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \qquad \forall\, \lambda,\ \mu \in \rho(A)$.

(d) Für $A, B \in \mathcal{L}(X)$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
  (1) $AB = BA$
  (2) $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutzen Sie für (2) $\Longrightarrow$ (1) in (c) zweite Ableitungen der auftretenden Funktionen.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 29.06.2023.