

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 41:

Berechnen Sie die Einträge der Prolongationsmatrizen für folgende Fälle. (*Äquivalent: Finden Sie eine Matrixdarstellung der natürlichen Einbettung.*) Nutzen Sie dabei aus, dass eine Verfeinerung eines Gitters über die Bilder einer Verfeinerung des Referenzelements erzeugt werden kann.

- (a) Quadratische Lagrange-Elemente auf Intervallen in \mathbb{R} , Verfeinerung durch Halbierung jedes Intervalls.
- (b) Lineare Lagrange-Elemente auf Dreiecksgittern in \mathbb{R}^2 , Verfeinerung durch Unterteilung jedes Dreiecks in vier kongruente Teildreiecke.
- (c) Bilineare Elemente auf Vierecksgittern in \mathbb{R}^2 , Verfeinerung jedes Vierecks in vier Teilvierecke durch Verbinden der gegenüberliegenden Kantenmittelpunkte.
- (d) Lineare Lagrange-Elemente auf Tetraedergittern in \mathbb{R}^3 , Verfeinerung jedes Tetraeders in acht Teiltetraeder unter Verwendung der Ecken und der Kantenmittelpunkte.

Aufgabe 42:

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des durch Finite Differenzen auf $[0, 1]^2$ diskretisierten Laplace-Operators mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Als Schrittweite in x - und y -Richtung sei wie immer $h = \frac{1}{m+1}$ gewählt.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Wissen über die Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix.

- (b) Zeigen Sie, dass sich die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = \left(I - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} A_h \right) x^{(k)} + \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} b_h$$

im Modellproblem aus (a) für ausreichend große m der mit $\omega = 1/2$ gedämpften Jacobi-Iteration nähert.

Aufgabe 43:

Zeigen Sie Lemma (4.3), d.h. zeigen Sie, dass gilt:

- (a) $\| \cdot \|_s$ ist tatsächlich eine Norm.
- (b) $\|x\|_s \leq \|x\|_r^{1/2} \cdot \|x\|_t^{1/2}$ für $s = \frac{t+r}{2}$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Aufgabe 44:

Für die durch die Steifigkeitsmatrix definierten Normen $\| \cdot \|_s$ ist Ihnen bekannt, dass

$$\|v_h\|_1^2 \leq \|v_h\|_0 \cdot \|v_h\|_2 \quad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass für die Sobolev-Normen entsprechend gilt: Es gibt eine Konstante c , so dass

$$\|v\|_1^2 \leq c \|v\|_0 \cdot \|v\|_2, \quad \text{für alle } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{mit } \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2.$$

Geben Sie c explizit an.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 22.06.2023.