

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

**Aufgabe 37:**

Zeigen Sie, dass

$$\varphi \mapsto A\varphi, \quad (A\varphi)(x) = \int_a^b \sin(x+y)\varphi(y) dy$$

ein kompakter Operator auf  $L^2([a, b])$ ,  $b > a$ , ist.

**Hinweis:** Verwenden Sie nicht direkt die Definition, sondern Aussagen aus der Vorlesung bzw. der Übung.

**Aufgabe 38:**

Finden Sie die Eigenvektoren zu den nicht-Null Eigenwerten der Gauß-Seidel Iterationsmatrix  $G$  für das in der Vorlesung betrachtete Modellproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0, 1)^2 \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Aufgabe 39:**

Es sei  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$  strikt diagonaldominant, d.h.

$$\max_{i=1, \dots, n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Jacobi- als auch das Gauß-Seidel-Verfahren angewandt auf  $Ax = b$  bei beliebigem Startwert  $x_0$  und für jede rechte Seite  $b$  gegen  $A^{-1}b$  konvergiert.

**Aufgabe 40:**

Implementieren Sie sowohl das Jacobi-Verfahren als auch das Gauß-Seidel-Verfahren zum Lösen von

$$Ax = b.$$

$A$  sei dabei die Finite Differenzen Approximation an den Laplace Operator auf  $[0, 1]^3$  mit Gitterweite  $h = 1/(m+1)$ ,  $m = 49$ , mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Wählen Sie  $b = 0$  und  $x^{(0)}$  als Array der Größe  $m^3$  mit Zufallszahlen aus  $[0, 1)$ . Führen Sie jeweils  $k = 200$  Iterationen durch. Plotten Sie den Logarithmus der Fehler gegen die Anzahl der Iterationen.

**Hinweis:** Gestalten Sie den Algorithmus möglichst effizient, es könnte sonst sein, dass Sie sehr lange auf das Ergebnis warten müssen (Stichwort: **sparse**).

**Besprechung in der Übung am Donnerstag, 15.06.2023.**