Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

04.04.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie allgemeine, stetige Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x, y, t) \mapsto u(x, y, t)$ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x} u = 42$ (b) $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u = 6y$ (c) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 7$

Beispiel: Die allgemeine Lösung von $\frac{\partial}{\partial t} u = 0$ ist $u(x, y, t) = v(x, y)$ mit $v \in C^0(\mathbb{R}^2)$ beliebig.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das Randwertproblem: Finde $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} y''(x) &= c\sqrt{1 + y'(x)^2} \quad \text{für } x \in (0, 1), \\ y'(0) &= 0, \\ y(1) &= h. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \kappa + \tfrac{1}{c} \cosh(cx)$$

obiges Randwertproblem löst, wobei Sie κ passend bestimmen.

Aufgabe 3:

Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Das heißt, zeigen Sie, dass alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, mit offenem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, für die

$$\int_\Omega f g \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$$

gilt, die Identität

$$f \equiv 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

erfüllen.

b.w.

Aufgabe 4:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Für jede beliebige Teilmenge $V \subset \Omega$ gelte die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V w(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V f(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial V} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Hier seien $w : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die gespeicherte Wärmeenergie (der Wärmeinhalt), $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Wärmequelle sowie $\boldsymbol{q} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ der Wärmestrom/-fluss und $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale $\boldsymbol{n} : \partial V \to \mathbb{S}^2$.

(a) Zeigen Sie mithilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass in $\Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} w - f + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0.$$

Nennen Sie die dazu notwendigen Voraussetzungen.

(b) Es sei $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ die Temperatur (in Kelvin). Mit der Dichte ρ und der spezifischen Wärmekapazität c gilt $w = \rho c u$. Darüber hinaus beschreibt das Fouriersche Gesetz den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrom durch

$$\boldsymbol{q} = -k \nabla u,$$

wobei k die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist. Leiten Sie aus diesen Angaben und Teil (a) eine partielle Differentialgleichung für u her. Nehmen Sie dazu an, dass k, ρ und c konstant sind.

Besprechung in der Übung am Mittwoch, 12.04.2023.