Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
ACHIM SCHÖLE 3.5.2023

Numerik I – PYTHON-Vorkurs – 2. Übungsblatt

Aufgabe 17: *(Bild unter linearer Abbildung in $\mathbb{R}^2$)*

(a) Schreiben Sie eine Funktion `plotBildAbb(A)`, die den Einheitskreis (also $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$), sowie das Einheitsquadrat (also $Q := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$) und jeweils das Bild dieser Figuren unter der von einer gegebenen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ induzierten linearen Abbildung

$$\boldsymbol{L_A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{L_A}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

in ein gemeinsames Fenster zeichnet. Benutzen Sie `axis('equal')`.
Hinweis: Sie können die Urbildpunkte in einem $2 \times n$-Array `k` bzw. `q` speichern. Zeichnen Sie die erste gegen die zweite Zeile von `k` bzw. `q`. Die lineare Abbildung können Sie durch Matrix-Matrix-Multiplikation direkt auf alle Punkte anwenden. *Tipp für die Darstellung von Q: Verwenden Sie, wie in der Vorlesung, die Vektoren der Eckpunkte.*

(b) Erweitern Sie den Plot soweit, dass die vier Eckpunkte des Einheitsquadrats in vier unterschiedlichen Farben markiert sind. Überlegen Sie, auf welche Punkte die Eckpunkte jeweils abgebildet werden und markieren Sie diese Punkte in der dazugehörigen Farbe.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit den folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}_2 - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T,$$

mit $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Was bewirken die Matrizen?

Aufgabe 18: *(Die Hilfe verwenden)*

Verwenden Sie die PYTHON-Hilfe, um die folgenden Aufgaben zu lösen.

(a) Wie lautet der Winkel von $2 + 3i$, d.h. wie lautet $\varphi \in [-\pi, \pi]$ für $2 + 3i = r \cdot e^{i\varphi}$? Wie erhalten wir den Radius r?

(b) Zeichnen Sie in der komplexen Ebene die Menge

$$M := \left\{ \frac{z + \frac{3}{2}i}{z - 2i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \text{ für } z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Finden Sie hierzu heraus, wie Sie auf den Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl zugreifen können.

Hinweis: Wenn Sie den gewünschten Befehl nicht kennen, sehen Sie nach, ob ein vielleicht passender englischer Befehl existiert.

Aufgabe 19: *(Zeilenstufenform)*

(a) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Schreiben Sie eine Funktion `zeilenstufen(A)`, die die Matrix A in Zeilenstufenform bringt. Sie können die notwendigen Umformungen entweder mit Hilfe von Multiplikationen von links mit Elementarmatrizen vornehmen oder direkt auf der Matrix A ausführen. Achten Sie darauf, dass Ihr Algorithmus mit Matrixeinträgen vom Typ `float` rechnet.

(b) Wie erhalten Sie den Rang der Matrix aus der Zeilenstufenform? Erweitern Sie Ihre Funktion so, dass sie neben der umgeformten Matrix auch deren Rang ausgibt.

(c) Testen Sie Ihre Funktion an den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20: (*Vorwärtssubstitution*)

Gegeben sei eine linke untere Dreiecksmatrix $L = (\ell_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Vektor $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `vorwaerts(L,b)`, welche das lineare Gleichungssystem $Lx = b$ durch Vorwärtssubstitution löst und den Vektor x ausgibt. Benutzen Sie dabei nicht den `solve`-Befehl, sondern berechnen Sie x wie folgt:

$$x_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}} \text{ und } x_i = \frac{1}{\ell_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} x_k \ell_{ik} \right) \text{ für } i = 2, \dots, n$$

(b) Wie erkennt man, ob L singulär ist? Erweitern Sie Ihre Funktion, so dass mit Hilfe von `assert` eine sinnvolle Fehlermeldung ausgegeben wird, sollte L nicht invertierbar sein. Berechnen Sie dazu NICHT die Determinante der Matrix.

(c) Testen Sie Ihre Vorwärtssubstitution mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 0 \\ -7 & 8 & -9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Befehle `numpy.linalg.solve` und `numpy.allclose`.

Aufgabe 21:

Implementieren Sie eine Pythonfunktion, die zu vorgegeben Knoten $(c_1, \dots, c_s)$ Gewichte $(b_1, \dots, b_s)$ bestimmt, sodass die dadruch gegeben QF maximale Ordnung hat.

(a) Berechen Sie die Gewichte als Lösung des LGS aus (2.4)

(b) Berechen Sie die Gewichte durch Integration der Lagrangepolynome, vgl. Satz (2.8).

Aufgabe 22: (*Gleichungssysteme mit LR und QR lösen*)

Gegeben seien die reellen Datenpunkte $(x_i, y_i)_{i=0}^3$ mit paarweise verschiedenen x_i. Wir suchen ein Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^3 a_j x^j \in \mathbb{P}_3$, das die Bedingungen $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \dots, 3$ erfüllt.
Wie leicht nachzuvollziehen ist, lassen sich die Koeffizienten a_j des Polynoms über folgendes Gleichungssystem bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

b.w.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `koeffloesLR(x, y)`, die Arrays `x` und `y` mit den Stellen x_i, $i = 0, \ldots, 3$ bzw. den Werten y_i als Eingabe erhält und das obige Gleichungssystem analog zu Aufgabe 40(a) löst. Verwenden Sie hier für die LR-Zerlegung die Funktionen `scipy.linalg.lu` und für die Vorwärts-/Rückwärtssubstitution die Funktion `scipy.linalg.solve_triangular`. Lesen Sie sich, falls notwendig, die Hilfe der Funktionen durch.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `koeffloesQR(x, y)`, die wieder die Arrays `x` und `y` als Eingabe erhält, aber diesmal das Gleichungssystem mit Hilfe der QR-Zerlegung berechnet. Verwenden Sie hierfür die Funktion `scipy.linalg.qr`.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen mit den Datenpunkten $(0, 3),\ (1, 0),\ (4, -1),\ (6, 2)$.

Diese Aufgaben werden nicht in den Porgrammierübungen besprochen.