Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN
DR. MARINA FISCHER
DR. CHRISTOPH MATERN
17. MAI 2023

19	20	21	Σ

NAME: ____________________

NAME: ____________________

Numerik I – 7. Übungsblatt

Hinweis: Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte
`Name1_Name2_Blatt7.pdf` bzw. `Name1_Blatt7.pdf`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Aufgabe 19:

Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x).$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x\, d_{k+1} - d_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k &= d_k + 2x\, e_{k+1} - e_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 1), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem $p'(x) = e_1 - e_3$ gilt.

Hinweis: Es gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen d'_k und e_{k+1}.

Aufgabe 20:

Leiten Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, das lineare Gleichungssystem für die Parameter $\tau_i = s'(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, für den sogenannten kubischen "not a knot" Spline her, d.h. für den kubische Spline s, der zusätzlich die Bedingungen $s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1)$ und $s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1})$ erfüllt.

Aufgabe 21:

(a) Bestimmen Sie den eingespannten kubischen Spline mit $s'(0) = s'(2) = 0$ durch die Punkte

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (0, 1) \\ (x_1, y_1) &= (1, 2) \\ (x_2, y_2) &= (2, 1) \end{aligned}$$

(b) Zeichnen oder plotten Sie den resultierenden Spline.

b.w.

Programmieraufgabe 7:

Dateiname: `Name1_Name2_A7.py` bzw. `Name1_A7.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

(a) Schreiben Sie eine Methode `baryGew(x)` zur Bestimmung der baryzentrischen Gewichte λ_i aus Aufgabe 14. `baryGew` erwartet als Eingabe ein `array x` mit den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und gibt ein `array` mit den Gewichten $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ zurück.

(b) Schreiben Sie eine Methode `bary(x,f,lam, X)` zur Auswertung des Polynoms mit Hilfe der baryzentrischen Interpolationsformel aus Aufgabe 14. Für Stützstellen `x` $= (x_0, \ldots, x_n)$ und Funktionswerte `f` $= (f_0, \ldots, f_n)$ (beide als `array`) wertet `bary` das Interpolationspolynom $p_{f,n}$ zu $(x_i, f_i)_{i=0}^n$ an den Einträgen eines `arrays X` $= (X_1, \ldots, X_N)$ aus, wobei `lam` $= (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ das `array` der Gewichte aus Aufgabenteil a) ist, und gibt das Ergebnis als `array` zurück.
Hinweis: Beachten Sie, dass $p_{f,n}$ in der baryzentrischen Form in den Stützstellen (hebbare) Singularitäten aufweist.

(c) Seien $p_{f,n}$ bzw. $\hat{p}_{f,n}$ die Interpolationspolynome vom Grad n von

$$f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}, \quad x \in [-1, 1]$$

zu $x_i = \frac{2i}{n} - 1$ bzw. $\hat{x}_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}$, für $i = 0, \ldots, n$. Verwenden Sie `bary` und `baryGew` um die Interpolationspolynome $p_{f,10}$, $p_{f,100}$, $\hat{p}_{f,10}$ und $\hat{p}_{f,100}$ zusammen mit f auf $N = 401$ äquidistanten Punkten im Intervall $[-1, 1]$ gut erkennbar graphisch darzustellen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 24. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 24. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.