Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN
DR. MARINA FISCHER
DR. CHRISTOPH MATERN
10. MAI 2023

16	17	18	Σ

NAME: ____________________
NAME: ____________________

Numerik I – 6. Übungsblatt

Hinweis: Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte
`Name1_Name2_Blatt6.pdf` bzw. `Name1_Blatt6.pdf`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Aufgabe 16:

Bestimmen Sie Maximalstellen und Maxima des Betrag des Knotenpolynoms $|M(x)| = |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$ auf $[-1, 1]$ für die Knoten:

(a) $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und

(b) $x_0 = -1$, $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1$.

Aufgabe 17:

Zeigen Sie, dass für $n + 1$ äquidistanten Knoten die Gewichte λ_j in der baryzentrischen Interpolationsformel aus Aufgabe 14 als

$$\lambda_j = (-1)^j \binom{n}{j}$$

gewählt werden können.

Aufgabe 18:

Seien $\omega : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ das dazugehörige gewichtete L^2 Skalarprodukt, und $\|\cdot\|_\omega$ die dazugehörige Norm. Insbesondere gilt also

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \|f\|_\omega^2 = \langle f, f \rangle_\omega = \int_\alpha^\beta (f(x))^2\omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sei $(b_k, c_k)_{k=0}^n$ eine Quadraturformel der Ordnung $2n+1$ zur Approximation eines gewichteten Integrals der Form $\int_\alpha^\beta f(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$. Seien $l_0, \ldots, l_n$ die Lagrange-Polynome und P_n der Interpolationsoperator zu den Knoten $c_0, \ldots, c_n$.

Zeigen Sie:

(a) Sei $f \in C[\alpha, \beta]$. Dann gilt für alle $p \in \mathcal{P}_n$

$$\|p - P_n(f)\|_\omega^2 = \sum_{k=0}^{n} |(f - p)(c_k)|^2 \|l_k\|_\omega^2.$$

(b) Seien $\mu_0 = \int_\alpha^\beta \omega(x)\,\mathrm{d}x$ und $f \in C[\alpha, \beta]$. Dann gilt für alle $p \in \mathcal{P}_n$

$$\|f - P_n(f)\|_\omega \le 2\sqrt{\mu_0}\|f - p\|_\infty.$$

Hinweis: Betrachten Sie $f - P_n(f) = f - p + p - P_n(f)$ und die erste Ordnungsbedingung für gewichtete Quadraturformeln.

Programmieraufgabe 6: (Tschebyscheff-Interpolation)

Dateiname: `Name1_Name2_A6.py` bzw. `Name1_A6.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

(a) Implementieren Sie selbst eine Methode `chebcoef(`f`, `n`)`, die mit (10.9) zu gegeben $f(x_j)$, $j = 0, \dots, n$, die Koeffizienten c_k des zugehörigen Interpolationspolynoms

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x)$$

mit den Tschebyscheff-Stützstellen x_j berechnet.
Eingabe: Funktion `f` als `functionhandle` und `integer n`.
Rückgabe: Ein `np.array c` mit den oben genannten c_k als Elementen.

(b) Implementieren Sie selbst den in (10.10) angegebenen *Clenshaw-Algorithmus* in einer Methode `chebval(`c`, `X`)`.
Eingabe: Ein `np.array c` (siehe (a)) und ein `np.array X` mit den Stellen X_k an denen das Interpolationspolynom ausgewertet werden soll.
Rückgabe: Ein `np.array y` mit den Auswertungen des Interpolationspolynoms an den Stellen X_k.

(c) Testen Sie Ihre Methoden, indem Sie das Tschebyscheff-Interpolationspolynom mit $n = 6$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

auf einem feinen Gitter über $[-1, 1]$ zusammen mit $f(x)$ plotten.
Was passiert, wenn Sie n immer größer machen?

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 17. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 17. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.