Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Melinda Hagedorn
Dr. Marina Fischer
Dr. Christoph Matern
03. Mai 2023

13	14	15	Σ

Name: ____________

Name: ____________

Numerik I – 5. Übungsblatt

Hinweis: Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte
`Name1_Name2_Blatt5.pdf` bzw. `Name1_Blatt5.pdf`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Aufgabe 13:

(a) Seien $p_0, \dots, p_n \in \mathcal{P}_n$ mit $\deg(p_k) = k$, $0 \le k \le n$ und $p_0 \equiv c \neq 0$. Zeigen Sie: Dann bildet $\{p_k \mid 0 \le k \le n\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

(b) Bezeichne zu einer stetigen Funktion f das zugehörige Interpolationspolynom bezüglich der Knoten $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ mit p_f. Sei

$$P : C([a,b]) \to \mathcal{P}_n, \quad f \mapsto p_f$$

die Abbildung, die f auf sein Interpolationspolynom abbildet. Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist, d.h. dass gilt:

$$P \circ P = P$$

(c) Zeigen Sie zuletzt, dass P sogar eine Orthogonalprojektion bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) g(x_k)$$

ist, d.h. zeigen Sie, dass für $f \in C([a,b])$ gilt:

$$\langle f - P(f), p \rangle = 0, \ \forall p \in \mathcal{P}_n$$

Aufgabe 14: (Baryzentrische Interpolation)

Seien $x_0 < \dots < x_n$ Knoten, $M(x)$ das zugehörige Knotenpolynom und $l_i(x)$, $0 \le i \le n$ die zugehörigen Lagrange-Polynome. Zeigen Sie die Gleichungen mit $\star$:

(a)

$$l_i(x) \stackrel{\star}{=} M(x) \frac{\lambda_i}{x - x_i} \qquad \text{für} \qquad \lambda_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} \stackrel{\star}{=} \frac{1}{M'(x_i)} \qquad \text{und} \qquad x \neq x_i$$

(b) Sei p_f das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_i, f_i)_{i=0}^n$, so gilt die baryzentrische Interpolationsformel (mit hebbaren Singularitäten):

$$p_f(x) \stackrel{\star}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i f_i}{x - x_i} \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

Hinweis: Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \stackrel{\star}{\equiv} 1$.

b.w.

Aufgabe 15:

Zeigen Sie Lemma (10.7) aus Kapitel II der Vorlesung, d.h. die Tschebyscheff-Polynome T_0, T_1, ..., T_n sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Programmieraufgabe 5: (Polynom-Interpolation)

Dateiname: `Name1_Name2_A5.py` bzw. `Name1_A5.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Gewünscht ist eine Methode `polyinterpol(x,y,X)`, welche aus Daten (x_k, y_k), $k = 0, .., N$, ein Interpolationspolynom erstellt und die Auswertungen dieses an den Punkten X_j zurückgibt.
Eingabeparameter: `np.array x` mit äquidistanten Stützstellen, ein `np.array y` mit Funktionswerten an den Stützstellen und ein `np.array X` mit auszuwertenden Punkten X_j.
Rückgabe: `np.array Y` mit den Auswertungen des Interpolationspolynoms an `X`.

(a) Auf der Vorlesungsseite finden Sie die Datei `programmieraufgabe5.py`, welche schon ein Grundgerüst von `polyinterpol(x,y,X)` enthält.
Die innere Methode `Deltas(y)` gibt für ein `np.array y` ein `np.array` mit Einträgen $\Delta^k y_0$, mit $k = 0, ..., N$, zurück (siehe Quelltext und 8.3).
Die innere Methode `fakultaeten(k)` gibt ein `np.array` $[0!, 1!, 2!, \ldots, k!]$ zurück.

Ergänzen Sie die Methode `polyinterpol` so, dass durch das Horner-Schema das Interpolationspolynom an den Stellen X ausgewertet wird.

Fertige Methoden, welche die Aufgabe trivial machen (z.B. aus `numpy`), sind nicht erlaubt (die oben genannten inneren Methoden dürfen Sie natürlich verwenden).

(b) Testen Sie Ihre Methode, indem Sie ein Polynom interpolieren (Tipp: Aufgabe 13).

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 10. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 10. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.