Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN
DR. MARINA FISCHER
DR. CHRISTOPH MATERN
26. APRIL 2023

10	11	12	Σ

NAME: ____________________

NAME: ____________________

Numerik I – 4. Übungsblatt

Hinweis: Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte

`Name1_Name2_Blatt4.pdf` bzw. `Name1_Blatt4.pdf`,

wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Aufgabe 10: (Ordnungsbedingungen für gewichtete Quadraturformeln)

Wir approximieren

$$\int_\alpha^\beta w(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^s b_i f(c_i).$$

Zeigen Sie: Diese Formel ist exakt für alle Polynome vom Grad $\leq p-1$,
d.h. $\int_\alpha^\beta w(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^s b_i q(c_i)$ mit $q \in \mathcal{P}_{p-1}$, genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} = \int_\alpha^\beta x^{q-1} w(x) \mathrm{d}x \qquad 1 \leq q \leq p.$$

Aufgabe 11:

Seien

$$f(x) = \sin\left(x\tfrac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2}{2+x^2}.$$

- Berechnen Sie jeweils das Interpolationspolynom durch die folgenden beiden Punktmengen:
  (a) $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$ mit $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
  (b) $(x_i, g(x_i))$, $i = 0, 1, 2$ mit $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
- Werten Sie die beiden Interpolationspolynome für den Wert $x = 0$ mit Hilfe des Hornerschemas aus. Machen Sie dabei deutlich, wie genau Sie vorgehen. Vergleichen Sie mit den Werten $f(0)$ und $g(0)$.

Aufgabe 12:

Skizzieren Sie in Pseudo-Code eine Funktion `divDiff`, welche zu Eingaben $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_n)$ einen Vektor mit den 0-ten bis n-ten dividierten Differenzen zurückgibt, also

$$\vec{d} = (y[x_0], \delta y[x_0, x_1], \ldots, \delta^n y[x_0, \ldots, x_n]).$$

b.w.

Programmieraufgabe 4:

Dateiname: `Name1_Name2_A4.py` bzw. `Name1_A4.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Schreiben Sie eine Methode `kepler(`φ`, `l`)`, die für gegebene Daten (φ_j, l_j), $j = 1, ..., n$ das Volumen des Fasses, ähnlich zu Aufgabe 4, mit der aufsummierten Trapezregel approximiert.
Eingabeparameter sind `numpy arrays` φ und l, deren Elemente die gemessenen Winkel und die dazugehörige Längen sind. Rückgabe ist die Approximation des Volumens als `float`.

Sie können dabei annehmen, dass die Winkel φ_j sortiert sind und den maximalen Winkelbereich "abdecken". Die Längen l_j sind jeweils gemessen von einem Punkt A auf der Fassoberfläche zu einem Punkt B_j auf der "gegenüberliegenden" Seite, wie in der Skizze angegeben, wobei A, B_j und die Rotationsachse in einer Ebene liegen. Die Winkel φ_j sind im Bogenmaß gegeben und gegen ein Lot zur Rotationsachse gemessen.

Laden Sie sich von der Numerik I Homepage die Datei `pa4_daten.py` herunter, welche die Messdaten zu zwei Fässern enthält (`phi1`, `l1` bzw. `phi2`, `l2`) (mit `import` können Sie die Daten importieren). In den Daten ist eine Messung zum Winkel $\varphi = 0$ enthalten. Damit ist der Punkt A definiert. Beachten Sie, dass die Winkel zum Teil negativ sind.

Benutzen Sie `kepler` und die Messdaten um die Volumina der beiden Fässer zu approximieren. Bestimmen Sie den Approximationsfehler (Ausgabe z.B. mit `print`). Die exakten Volumina sind in der Datei als `ext1` bzw. `ext2` gespeichert.

Tipp zur Überprüfung Ihres Programmes: Das erste Fass ist ein Zylinder.

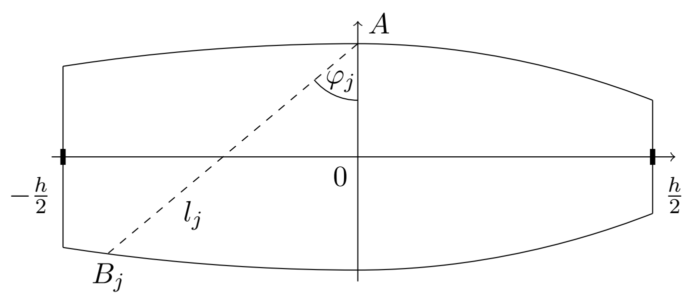

Abbildung 1: Veranschaulichung der Kepler'schen Messmethode für das Volumen eines Fasses

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 03. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 03. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.