Heinrich Heine
Universität
Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN
DR. MARINA FISCHER
DR. CHRISTOPH MATERN
19. APRIL 2023

7	8	9	Σ

NAME: ____________________

NAME: ____________________

Numerik I – 3. Übungsblatt

Aufgabe 7:

Sei $p \in \mathcal{P}_2$ eine Parabel mit $p|_{[a,b]} \geq 0$ auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $(a < b)$. Zeigen Sie:

$$A_P = A_T + \tfrac{4}{3} A_D$$

wobei

$$A_P := \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

die Fläche unter der Parabel (grau), A_D die Fläche des Dreicks mit den Eckpunkten $(a, p(a))$, $(b, p(b))$ und $(\frac{a+b}{2}, p(\frac{a+b}{2}))$ (hellgrau) und A_T die Fläche des Trapezes mit den Eckpunkten $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, p(a))$, $(b, p(b))$ (dunkelgrau) ist, vgl. Abbildung 1.

Warum ist damit die Aussage aus der Vorlesung – Beispiel (1.2) 1) (Fläche unter einer Parabel nach Archimedes) – gezeigt?

Hinweis: Verwenden Sie die Simpson-Regel. Die Fläche des Dreiecks ist als negativ zu werten, falls die Parabel nach oben geöffnet ist.

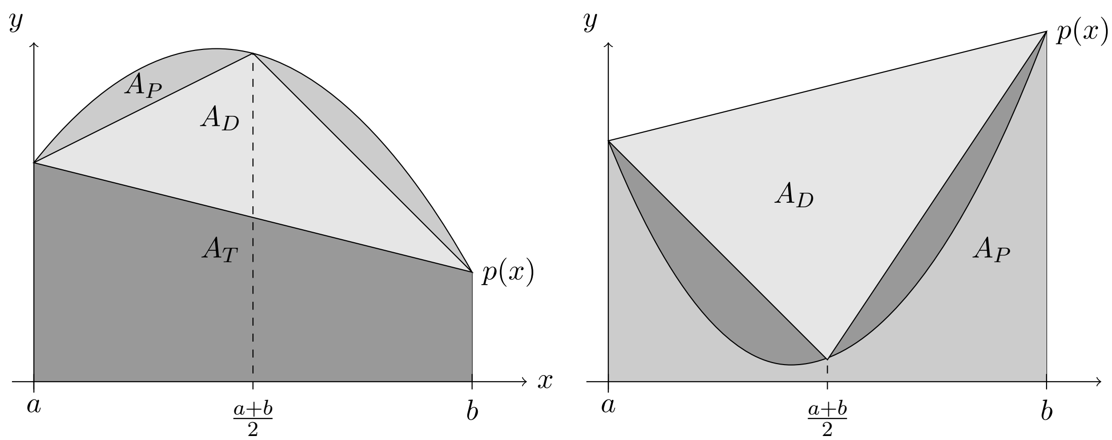

Abbildung 1:

Aufgabe 8:

(a) Bestimmen Sie die Lobatto-Quadraturformeln mit
  (i) drei und
  (ii) vier Knoten.

(b) Transformieren Sie die Lobatto-Quadraturformel mit vier Knoten auf das Intervall $[1, 3]$ und approximieren Sie damit das Integral $\int_1^3 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$. Vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Wert des Integrals.

b.w.

Aufgabe 9:

Es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ die Folge von Orthogonalpolynomen aus Satz 5.3 bzgl. des Skalarprodukts auf $[-1,1]$ mit der konstanten Gewichtsfunktion $w(x) \equiv 1$.
Nun sei

$$P_k(x) := \frac{p_k(x)}{p_k(1)},$$

also derart normiert, dass $P_k(1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass

$$P_k(-1) = (-1)^k.$$

Hinweis: Berechnen Sie einige Polynome $P_k(x)$. Was fällt Ihnen auf?

Programmieraufgabe 3:

Dateiname: `Name1_Name2_A3.py` bzw. `Name1_A3.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

(a) Implementieren Sie eine Methode `adagaussqf(f,a,b,tol)`, welche mittels einer adaptiven Quadraturformel wie in der Vorlesung das Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

approximiert. Verwenden Sie dabei eine 15-stufige Gauß-Quadraturformel und einen 14- und einen sechsstufigen Fehlerschätzer wie in (7.2) III in der Vorlesung für die Fehlerschätzung. Die Knoten und Gewichte finden Sie in der Datei `gauss15.py` auf der Internetseite zur Vorlesung.
Eingabe:
`f`: Funktion, die integriert werden soll (`f` bekommt ein `array` übergeben und gibt ein `array` mit dem selben `shape` zurück)
`a` und `b`: untere und obere Grenzen des Integrals (Typ `jeweils float`)
`tol`: Toleranz (Typ `float`)
Ausgabe:
Ein `tuple (integral, err, zerlegung)` mit
`integral`: Approximation an das Integral (Typ `float`)
`err`: Fehlerschätzer des gesamten Fehlers (Typ `float`)
`zerlegung`: die adaptiv erstellte Zerlegung des Intervalls (Typ `array`)
Tipp: Innere Funktionen machen Ihre Methode übersichtlicher.

(b) Testen Sie Ihr Programm am Beispiel aus dem Hairer Skript auf Seite 17, d.h.

$$f(x) = 2 + \sin\left(3\cos\left(0.002(x-40)^2\right)\right)$$

auf dem Intervall $[10, 110]$ mit Toleranzen 10^{-2}, 10^{-4} und 10^{-8}. Zeigen Sie die Zerlegung die Ihr Algorithmus berechnet (`print`) und vergleichen Sie den geschätzten Fehler mit dem tatsächlichen Fehler. Dabei können Sie den "exakten" Wert des Integrals mittels der PYTHON Routine `scipy.integrate.quad` berechnen. Denken Sie daran bei der Berechnung des "exakten" Wertes jeweils eine sehr kleine Fehlertoleranz vorzugeben!

Hinweis: Sie haben für diese Programmieraufgabe zwei Wochen Zeit. Nächste Woche gibt es wieder eine neue Programmieraufgabe.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 26. April bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I".
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 03. Mai bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I".