MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN
DR. MARINA FISCHER
DR. CHRISTOPH MATERN
28. JUNI 2023

37	38	39	Σ

NAME: ____________________

NAME: ____________________

Numerik I – 13. Übungsblatt

Hinweis: Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte
`Name1_Name2_Blatt13.pdf` bzw. `Name1_Blatt13.pdf`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Aufgabe 37:

Für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ : (t, y) \mapsto f(t, y)$, einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ und Skalare t und $h \in \mathbb{R}$ soll mit einer Funktion `nllsg`, mit der Signatur $\mathtt{x} = \mathtt{nllsg}(\mathtt{f}, \mathtt{z}, \mathtt{t}, \mathtt{h}, \mathtt{TOL})$, mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Lösung x des nichtlinearen Gleichungssytems

$$x = z + hf\left(t + \frac{h}{2}, \frac{z + x}{2}\right)$$

approximiert werden.

`f` ist eine Funktion, die Sie verwenden können, um zum Einen mit dem Aufruf `f(t,y)` den Funktionswert $f(t, y)$ an der Stelle (t, y) auszuwerten und zum Anderen mit dem Aufruf `f(t,y,'diff')` die Matrix $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)$ an der Stelle (t, y) auszuwerten.
Verwenden Sie ein geeignetes Abbruchkriterium, um die Iteration abzubrechen, falls die vorgegebene Toleranz `TOL` erreicht ist. Verwenden Sie als Startwert einen Zufallsvektor. Konvergiert das Newton-Verfahren nicht innerhalb von 150 Iterationen, so soll die Iteration abgebrochen werden und eine Warnung zusammen mit dem aktuellen Lösungsvektor x ausgegeben werden.

Geben Sie hierfür den Pseudocode der Funktion `nllsg` an.

Aufgabe 38:

Das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$, angewendet auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

führt auf die Rekursion

$$y_{k+1} = (1 + h\lambda) y_k.$$

Welche Bedingung müssen h und λ erfüllen, damit die Rekursion konvergiert?

Aufgabe 39:

Betrachten Sie die Integralgleichung

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} \lambda y(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Die Approximation des Integrals in (1) mittels folgender Rechtecksregel liefert

$$\int_t^{t+h} \lambda y(\tau)\, d\tau \approx h\lambda y(t).$$

Damit ergibt sich aus (1) das explizite Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n,$$

angewendet auf die Differentialgleichung $y'(t) = \lambda y(t)$.

(a) Welcher Quadraturformel entspricht das implizite Euler-Verfahren?

(b) Wie lautet die Iterationsvorschrift, wenn das Integral in (1) durch die Trapezregel ersetzt wird?

Programmieraufgabe 13:

Dateiname: `Name1_Name2_A13.py` bzw. `Name1_A13.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$, und $g : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ stetig mit $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem auf $[t_0, T]$

$$y'(t) = Ay(t) + g(t), \quad y(0) = y_0. \tag{2}$$

(a) Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$ für (2) in einer Funktion

```
[ t, y ] = explEuler(A, g, t0, y0, T, h).
```

(b) Implementieren Sie das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$ für (2) in einer Funktion

```
[ t, y ] = implEuler(A, g, t0, y0, T, h).
```

(c) Testen Sie Ihre Implementierungen für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi^2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ bzw. } g(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ (4-t)^2 \end{bmatrix}, \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [t_0, T] = [0, 8]$$

jeweils mit Schrittweiten $h = 0.1$ bzw. $h = 0.01$. Plotten Sie dabei die erste Komponente der Lösungen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 05. Juli bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 05. Juli bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.