Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Melinda Hagedorn
Dr. Marina Fischer
Dr. Christoph Matern
21. Juni 2023

34	35	36	Σ

Name: ____________

Name: ____________

Numerik I – 12. Übungsblatt

Hinweis: Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte
`Name1_Name2_Blatt12.pdf` bzw. `Name1_Blatt12.pdf`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

Aufgabe 34:

Die Messung eines Signals der Form

$$f(t) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - \beta \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

liefere die Tabelle

t_i	1	2	3
f_i	0	1	0

.

Die Parameter α und β sollen im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate optimal bestimmt werden. Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem an, stellen Sie die Normalengleichungen auf und lösen Sie diese.
Tipp: Die Sinus- und Cosinuswerte lassen sich explizit angeben (was das Rechnen erleichtert).

Aufgabe 35:

Zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion kann man ausgehend von einem Startwert x_0 das Newton-Verfahren verwenden. Seien

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto p(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 4x + 1, \quad x_0 = 3,$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{b_i - a_i^T x} a_i, \quad A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Formulieren Sie für die beiden Funktionen die Iterationsvorschrift, wobei Sie die jeweiligen Ableitungen berechnen.

(b) Berechnen Sie für die Funktionen p und f die ersten beiden Iterierten x_1 und x_2.

Aufgabe 36:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ und $a \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_{k+1} = \frac{n-1}{n} x_k + \frac{a}{n x_k^{n-1}}, \quad k \geq 0,$$

für jeden Startwert $x_0 \geq 1$ gegen $\sqrt[n]{a}$ konvergiert.

(b) Sei nun speziell $n = 2$, $a = 2$ und $x_0 = 2$. Berechnen Sie unter Ausnutzen der a posteriori Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes mit obiger Rekursion eine Näherung y für $\sqrt{2}$ mit $|y - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$. Vergleichen Sie die Anzahl der benötigten Iterationen mit der Zahl, die man aufgrund der a priori Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes erwartet.

Programmieraufgabe 12:

Dateiname: `Name1_Name2_A12.py` bzw. `Name1_A12.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

(a) Implementieren Sie in einer Methode `newton(`x_0`,`f`,`$\mathrm{D}f$`,`N_{it}`)` das Newton-Verfahren. Hierbei soll $x_0 \in \mathbb{R}^n$ der Startwert (als `array`) sein, f und $\mathrm{D}f$ Funktionen, die zu einer Eingabe $x \in \mathbb{R}^n$ (als `array`) den Wert $f(x) \in \mathbb{R}^n$ (als `array`) bzw. die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (als `array`) zurückgeben. Zuletzt sei $N_{\text{it}} \in \mathbb{N}$ eine festgelegte Anzahl an Iterationen, die jedes Mal vollständig durchlaufen werden.
Rückgabe ist eine Approximation (als `array`) an x^*, mit $f(x^*) = 0$.
Invertieren Sie *NICHT* die Matrix, sondern lösen Sie das Gleichungssystem!

(b) Sei

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ y - z \\ z - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \tag{1}$$

Approximieren Sie eine Lösung von (1) mit Hilfe Ihres Newton-Verfahrens für den Startwert $[x_0, y_0, z_0]^T = [42, 1, 0]^T$ und $N_{\text{it}} = 1$. Geben Sie Ihre Lösung aus.

(c) Das Problem, einen Schnittpunkt der Parabel $y = x^2$ mit dem Einheitskreis zu finden, lässt sich schreiben als

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \tag{2}$$

Approximieren Sie eine Lösung von (2) mit Hilfe Ihres Newton-Verfahrens für den Startwert $[x_0, y_0]^T = [1, 0]^T$ und $N_{\text{it}} = 2, 3, 4, 5$ und vergleichen Sie Ihre Resultate mit den exakten Lösungen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 28. Juni bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 28. Juni bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.