Heinrich Heine
Universität
Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Melinda Hagedorn
Dr. Marina Fischer
Dr. Christoph Matern
14. Juni 2023

| 31 | 32 | 33 | Σ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Name: ________________

Name: ________________

# Numerik I – 11. Übungsblatt

**Hinweis:** Verwenden Sie als Dateiname für die schriftliche Abgabe bitte
`Name1_Name2_Blatt11.pdf` bzw. `Name1_Blatt11.pdf`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

## Aufgabe 31:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ oder } j = n \\ -1 & \text{falls } i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $A$ eine $LR$-Zerlegung mit $|l_{ij}| \leq 1$ und $r_{nn} = 2^{n-1}$ besitzt.

## Aufgabe 32:

Finden Sie die sechs Fehler im folgenden Pseudocode für die $QR$-Zerlegung einer Matrix.

**Gegeben:** Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, mit Rang $n$ und Einträgen $a_{ij}$
**Gesucht:** $QR$-Zerlegung von $A$ ($A$ wird überschrieben!)

Eingabe: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
for $k = 1, \dots, n$

$\quad\alpha = -\text{sign}(a_{kk}) \cdot \|A[k:m,k]\|_2 \quad$ wobei $\text{sign}(0) := 1$

$\quad e_1 = [1, 0, \; \dots \; , 0]^T \in \mathbb{R}^{n-k+1}$

$\quad u_k = A[1:m,k] - \alpha e_1$

$$\tilde{Q}_k = I_{m-k+1} - \frac{u_k^T u_k}{\alpha(\alpha - a_{kk})} \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$$

$$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{Q}_k & 0 \\ \hline 0 & I_{k-1} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$\quad$ for $j = k+1, \dots, n$

$$A[k:m,j] = A[k:m,j] \; \frac{\langle A[k:m,j]\ ,\ u_k \rangle}{\alpha(\alpha - a_{kk})} u_k$$

$\quad$ end
end
$Q = Q_1 \cdots Q_n$
Rückgabe: $Q$ und $A$ $(= R)$

**Hinweise:** Die Indizierung der Matrizen und Vektoren beginnt bei 1.
$A[k:l]$ ist der $k$-te bis (inklusive) $l$-te Eintrag von $A$.

b.w.

**Aufgabe 33:**

Seien $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix und $c \in \mathbb{R}^2$. Sei $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ die Lösung des Gleichungssystems $Rx = c$ in Gleitkommaarithmetik mit der Maschinengenauigkeit $\texttt{eps} < 1/2$. Zeigen Sie: Es gibt eine obere Dreiecksmatrix $\hat{R} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\hat{R}\hat{x} = c$ und

$$|\hat{R} - R| \leq \frac{2\texttt{eps}}{1 - 2\texttt{eps}}|R|.$$

Gehen Sie dabei davon aus, dass sich die Einträge von $R$ und $c$ exakt in Gleitkommaarithmetik darstellen lassen. Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

(a) Die Lösung $x$ ergibt sich durch Rückwärtssubstitution gemäß

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}x_j\right), \; i = n-1, \ldots, 1.$$

(b) Führen Sie Störungsterme in die Formeln ein, um zu modellieren, dass die einzelnen Operationen mit Rundungsfehlern durchgeführt werden. Im Beweis von Satz (21.6) können Sie nachsehen, wie dies funktioniert.

(c) Formen Sie die Gleichungen mit den Störungstermen so um, dass klar wird, dass man die Störungen auch als Fehler in den Einträgen von $R$ interpretieren kann. Schreiben Sie genau auf, wie die Einträge von $\hat{R}$ aussehen!

(d) Zeigen Sie dann die geforderte Abschätzung.

**Hinweis:** Der Betrag ist komponentenweise zu verstehen.

**Programmieraufgabe 11:**

Dateiname: `Name1_Name2_A11.py` bzw. `Name1_A11.py`,
wobei Name1 (und Name2) Ihre Nachnamen sind. Dies erleichtert die Zuordnung Ihrer Abgaben.

(a) Schreiben Sie eine Methode `hilbertmatrix(n)`, welche die `n` $\times$ `n` Hilbert-Matrix

$$A = \left(\tfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n}$$

erstellt und als `array` zurückgibt.

(b) Sei $LL^T = A$ die Choleskyzerlegung der Matrix $A$. Schreiben Sie eine Methode `cholesky_exakt(n)`, welche den Choleskyfaktor $L = (l_{ij})_{i,j=1}^{n}$, mit

$$l_{ij} = \frac{\sqrt{2j-1}\cdot(i-1)!(i-1)!}{(i-j)!(i+j-1)!} \qquad \text{für } i \geq j,$$

der `n` $\times$ `n` Hilbertmatrix berechnet und als `array` zurückgibt.

(c) Bestimmen Sie numerisch die Cholesky-Zerlegung $A = \hat{L}\hat{L}^T$ der `n` $\times$ `n` Hilbert-Matrix (siehe *Hinweis*) für $n = [3, 6, 9, 12, 15]$.

(d) Bestimmen Sie (für $n = [3, 6, 9, 12, 15]$) die Norm des Residuums $A - \hat{L}\hat{L}^T$ (siehe (c)). Bestimmen Sie auch die Norm des Residuums $A - LL^T$ (siehe (b)).

**Hinweis:** Auf der Vorlesungsseite finden Sie die Datei `programmieraufgabe11.py`, welche Grundgerüste der Methoden und eine Implementierung der Choleskyzerlegung, wie in der Vorlesung gezeigt, beinhaltet. `scipy.special.factorial` ist zur Berechnung der Fakultät nützlich.
Beachten Sie, dass die Indizes der Matrizen bei 1 starten, die Indizierung bei `python` jedoch bei 0 anfängt.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 21. Juni bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.**
**Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 21. Juni bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.**