Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN
DR. MARINA FISCHER
DR. CHRISTOPH MATERN
5. APRIL 2023

1	2	3	Σ

NAME: ____________________

NAME: ____________________

Numerik I – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Recherchieren Sie in einem Analysisbuch Ihrer Wahl die Taylorformel für den eindimensionalen Fall. Geben Sie die Formel sowie die folgenden Restglieddarstellungen an:

- Integralform
- Lagrange Form
- Cauchy Form

Selbstverständlich müssen Sie die von Ihnen benutzte Quelle in Form eines korrekten Literaturzitats kenntlich machen. Es genügt *kein* Link zu einer Internetseite!

(b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

mit Hilfe des Taylorpolynoms vom Grad 2 im Entwicklungspunkt 0. Geben Sie eine Darstellung des Restgliedes in einer Form Ihrer Wahl an.

Aufgabe 2:

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Intervall mit $0 \in I$ ist.

(a) Es gelte $f \in \mathcal{O}(h^p)$ und $g \in \mathcal{O}(h^q)$ für $h \to 0$ und geeignete $p, q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(1) $(f+g) \in \mathcal{O}(h^{\min(p,q)})$ für $h \to 0$ und

(2) $(f \cdot g) \in \mathcal{O}(h^{p+q})$ für $h \to 0$.

(b) Die Funktion g habe keine Nullstellen nahe 0. Zeigen Sie:

$$f \in o(g) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g) \text{ für } h \to 0.$$

Zur Erinnerung an die Definitionen:

$$f \in \mathcal{O}(g) \text{ für } h \to 0 :\Leftrightarrow \exists_{C>0} \exists_{h_0>0} \forall_{h \in (0,h_0) \cap I} |f(h)| \leq C|g(h)|$$

und

$$f \in o(g) \text{ für } h \to 0 :\Leftrightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in I}} \frac{|f(h)|}{|g(h)|} = 0.$$

Für den letzten Fall habe g keine Nullstellen nahe 0.

Hinweis: Oft schreibt man $f \in \mathcal{O}(g(h))$, $f(h) \in \mathcal{O}(g(h))$ oder sogar $f = \mathcal{O}(g(h))$, falls eigentlich $f \in \mathcal{O}(g)$ gemeint ist.

b.w.

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1}^2$ mit $c_2 = 1$, sodass ihre Ordnung maximal wird. Geben Sie die maximale Ordnung an.

(b) Bestimmen Sie die maximale Ordnung der "pulcherrima et utilissima regula" von Newton:

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{8}\big(g(0) + 3g(1/3) + 3g(2/3) + g(1)\big)$$

Programmieraufgabe 1:

Hinweis: Sie können Ihre Lösung als `.py`- oder `.ipynb`-Datei abgeben.

Die Einheitskreisscheibe ist $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Der obere Halbkreisbogen wird für $x \in [-1, 1]$ durch

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

parametrisiert. Es soll die Fläche des oberen Halbkreises berechnet werden.

(a) Implementieren Sie in Python eine Funktion `MCquad(f, [a,b], N)`, die eine Monte Carlo Approximation von

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet und zurückgibt. Hierbei sind die Eingabeparameter (input)

(i) `f` ein functionhandle, d.h eine Funktion mit deren Hilfe man f in x auswerten kann.

(ii) `[a,b]` Liste mit zwei Einträgen, das Integrationsintervall ($a < b$)

(iii) `N`, die Anzahl der zufällig gleichverteilten Punkte im Intervall $[a, b]$.

Rückgabe (output) ist eine Zahl, die $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ approximiert.

(b) Berechnen Sie für $N = 2^4, 2^5, \ldots, 2^{20}$ den Betrag des Approximationsfehlers und tragen Sie diesen gegen die Anzahl N in einem doppellogarithmischen Diagramm ein. Dazu gibt es in `pyplot` den Befehl `plt.loglog`.

Bemerkungen:

In den Programmierübungen werden CIP-Pool Accounts vergeben.

Informieren Sie sich *regelmäßig* auf der Vorlesungsseite über aktuelle Informationen zur Vorlesung, den Übungszetteln und den Programmierübungen. Rufen Sie auch *regelmäßig* Ihre im Vorlesungsverzeichnis angegebene eMail-Adresse (üblicherweise die Rechenzentrumsaddresse, `vorname.nachname@hhu.de`) ab.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 12. April bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Übungen zu Numerik I“.
Abgabe der Programmieraufgaben am Mittwoch, 12. April bis 10:30 Uhr per ILIAS unter „Programmierübungen zu Numerik I“.