Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Melinda Hagedorn
Dr. Marina Fischer
Dr. Christoph Matern

19.7.2023

Klausur zur Numerik I

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Fachsemester: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Diplom (bitte ankreuzen)

Studienfach: ....
(z.B. Mathematik, Informatik Pflichtbereich Mathematik, Informatik Nebenfach Mathematik, Physik)

Für **Bachelor-Mathematik** Studenten nach der **Prüfungsordnung von 2008**:

Hiermit melde ich mich zur Klausur Numerik I an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

....
Unterschrift

Für Studenten, die die Zulassung bereits in vergangenen Semestern erlangt haben:

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser Klausur zugelassen bin, da ich die Klausur bei Prof. .... im Sommer-/Wintersemester .... mitgeschrieben, aber nicht bestanden habe und noch nicht endgültig nicht bestanden habe.

....
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
max. Punkte	10	4	4	7	6	5	6	4	46
err. Punkte									

Hinweise:

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen, schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg klar zu erkennen ist. Die Angabe des Endresultats alleine gibt keine Punkte.
- Berechnete Lösungen sind exakt anzugeben und nicht als gerundete Zahlen.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **23** Punkte hinreichend.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

	[wahr	falsch]
1. Die Gewichte einer s-stufigen ($s > 1$) Quadraturformel mit paarweise verschiedenen vorgegebenen Knoten sind immer so wählbar, dass die Ordnung mindestens s ist.	[	|]
2. Zu $(x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3$ mit $k = 0, \dots, n$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gibt es ein eindeutiges Polynom $p(x) \in \mathcal{P}_{2n}$, das $p(x_i) = z_i$ und $p'(x_i) = y_i$ erfüllt.	[	|]
3. Zu Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ gibt es genau einen kubischen Spline.	[	|]
4. Der Aufwand zur Berechnung der QR-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liegt in $\mathcal{O}(n^3)$.	[	|]
5. Die QR-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert.	[	|]
6. Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert.	[	|]
7. Betrachtet man $\mathbb{R}$ mit dem Betrag $\lvert \cdot \rvert$ so ist die absolute Kondition der Berechnung des Quadrats einer reellen Zahl kleiner gleich 2.	[	|]
8. Die Addition zweier reellen Zahlen in Gleitkommaarithmetik ist stabil im Sinne der Rückwärtsanalysis.	[	|]
9. Die Multiplikation einer reellen Zahl mit 2 in Gleitkommaarithmetik ist stabil im Sinne der Rückwärtsanalysis.	[	|]
10. Für $z < 0$ konvergiert die für $\Phi(x) = \frac{x}{1-z}$ durch $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ definierte Folge für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen einen Fixpunkt von Φ.	[	|]

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein Gewicht b und einen Knoten c so, dass die Quadraturformel

$$bf(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{2}f(c) \approx \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

maximale Ordnung hat und geben Sie die maximale Ordnung an.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die maximale Ordnung einer s-stufigen Quadraturformel zur Approximation von

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^s b_j f(c_j)$$

$2s$ ist.

Hierfür können Sie, **ohne** ihn zu beweisen, folgenden Satz verwenden:

Satz: Für Quadraturformeln mit Knoten c_i und Gewichten b_i, $i = 1, \ldots, s$ zur Approximation von $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Die Quadraturformel ist exakt für alle $p \in \mathcal{P}_{s+m-1}$, hat also Ordnung $s + m$.

b) Für $M(x) = \prod_{j=1}^s (x - c_j)$ ist $\int_{-1}^1 M(x)q(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}_{m-1}$.

Aufgabe 4: (3+4 Punkte)

Das Interpolationspolynom zu Daten (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 4$ ist als Newton-Interpolationspolynom durch

$$p(x) = \sum_{i=0}^{4} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right) \delta^i y[x_0, \ldots, x_i]$$

gegeben.

Die Stützstellen sind $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$ und $x_4 = 1$ und die dividierten Differenzen $y_0 = \delta^0 y[x_0] = 1$, $\delta^1 y[x_0, x_1] = -2$, $\delta^2 y[x_0, x_1, x_2] = 3$, $\delta^3 y[x_0, x_1, x_2, x_3] = -5$ und $\delta^4 y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 1$.

a) Tragen Sie die angegeben Werte in ein Newtonsches Differenzenschema ein. Mit den angegeben Werten bleiben viele Werte in dem Schema unbestimmt, die auch nicht berechnet werden müssen.

b) Berechnen Sie die Ableitung von p an der Stelle x_0, indem Sie das Newtonsche Differenzenschema um eine Diagonale erweitern.

Hinweis: Sie sollen das Polynom nicht berechnen. Wenn Sie das Polynom p berechnen, ableiten, und die Ableitung an der Stelle 2 auswerten, bekommen Sie für Teil b) höchstens einen Punkt.

b.w.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 6 & 10 & -9 \\ -8 & -9 & 26 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Es sei $A = QS$ die Zerlegung einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in eine orthogonale Matrix Q und eine symmetrisch positiv definite Matrix S bekannt.

Geben Sie den Pseudocode eines möglichst effizienten Verfahrens `loesAb(Q, S, b)`zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an.

Neben den arithmetischen Operationen, $+, \cdot, -, /$ (plus, mal, minus, geteilt) für Zahlen, Vektoren und Matrizen, Programmsteuerungsanweisungen wie `if, for, while` stehen ein Verfahren `cholesky(B)` zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix B, und ein Verfahren `loesTriy(T, y)` zur Lösung von $Tx = y$ für eine untere oder obere Dreiecksmatrix T zur Verfügung. Sie können Matrizen mit ^{T} auch transponieren.

Hinweis: Andere Matrixzerlegungen oder Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme oder zum Invertieren einer Matrix dürfen nicht verwendet werden.

Aufgabe 7: (2+2+2 Punkte)

Um die Wurzeln/Nullstellen des Polynoms $x^2 - 4x + 3$ zu bestimmen, kann man mit dem Ansatz $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - 4x + 3$ durch Koeffizientenvergleich ein nichtlineares Gleichungssystem herleiten.

Gesucht ist eine Lösung von $f(x_1, x_2) = (0, 0)^T$ für $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 4,\ x_1x_2 - 3)^T$. Diese soll mit dem Newtonverfahren bestimmt werden.

a) Geben Sie hierfür die allgemeine Iterationsvorschrift an.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(1, 0)^T$ eine Iteration des Newton-Verfahrens durch.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Wendet man das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$ auf die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

an, so erhält man eine rekursiv durch $y_{n+1} = y_n + hf((n+1)h, y_{n+1})$ definierte Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei nun $\lambda < 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0.$$

Zeigen Sie, dass für diese spezielle Differentialgleichung, die durch das implizite Euler-Verfahren definierte Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ beschränkt ist.