

Numerik I – PYTHON-Vorkurs – 3. Übungsblatt

Aufgabe 23: (Vorwärtssubstitution)

Gegeben sei eine linke untere Dreiecksmatrix $L = (\ell_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Vektor $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `vorwaerts(L, b)`, welche das lineare Gleichungssystem $Lx = b$ durch Vorwärtssubstitution löst und den Vektor x ausgibt. Benutzen Sie dabei nicht den `solve`-Befehl, sondern berechnen Sie x wie folgt:

$$x_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}} \text{ und } x_i = \frac{1}{\ell_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} x_k \ell_{ik} \right) \text{ für } i = 2, \dots, n$$

- (b) Wie erkennt man, ob L singulär ist? Erweitern Sie Ihre Funktion, so dass mit Hilfe von `assert` eine sinnvolle Fehlermeldung ausgegeben wird, sollte L nicht invertierbar sein. Berechnen Sie dazu NICHT die Determinante der Matrix.
- (c) Testen Sie Ihre Vorwärtssubstitution mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 0 \\ -7 & 8 & -9 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Befehle `numpy.linalg.solve` und `numpy.allclose`.

Aufgabe 24: (Grenzen des Computers)

- (a) Definieren Sie die Variable `a=1.2·1034`. Was erwarten Sie bei folgender Rechnung: `10 * a - 9 * a - a`? Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit PYTHON. Wieso kommt dieses Ergebnis zustande?
- (b) Definieren Sie die Variable `b=12·1033`. Was erwarten Sie bei folgender Rechnung: `10 * b - 9 * b - b`? Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit PYTHON. Wieso kommt dieses Ergebnis zustande? Steht es im Widerspruch zu (a)?
- (c) Seien $p(x) = \frac{1}{2}(x-1)^7$ und $q(x) = \frac{1}{2}x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{21}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + \frac{35}{2}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$. Man kann leicht überprüfen, dass $p(x) = q(x)$ gilt. Plotten Sie p und q einmal in einen gemeinsamen Plot über dem Intervall $[0.9, 1.1]$ und einmal in einen gemeinsamen Plot über dem Intervall $[0.99, 1.01]$. Sind die Ergebnisse wie erwartet? Was ist der Grund dafür? (Diese Teilaufgabe muss nicht mit der Polynomklasse gelöst werden.)

Aufgabe 25: (LR-Zerlegung)

Gegeben ist der Quellcode der Funktion `L, R = LRZerlegungVektorisiert(A)`, welche eine LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ohne Pivotisierung berechnet. Sie finden diesen auch auf der Vorlesungshomepage.

```

1 def LRZerlegungVektorisiert(A):
2     n = A.shape[0]
3     L = np.eye(n)
4     R = A.astype('float').copy()
5     for kk in range(n - 1):
6         L[kk+1:, kk] = R[kk+1:, kk] / R[kk, kk]
7         R[kk+1:, :] = R[kk+1:, :] - L[kk+1:, [kk]] * R[[kk], :]
8     return L, R

```

- Lesen und verstehen Sie diese Funktion.
- Schreiben Sie eine Funktion $L, R = \text{LRZerlegungSchleife}(A)$, welche die Zeilen 6 und 7 durch zwei Schleifen ersetzt.
- Fügen Sie erklärende Kommentare für jede Zeile Ihrer Funktion ab dem Beginn der `for`-Schleife über `kk` hinzu.
- Testen Sie Ihre Funktion mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26: (*LR-Zerlegung / Fehler im Code*)

Gegeben ist folgende platzsparende, aber nicht ganz fehlerfreie Version einer LR-Zerlegung der nicht-singulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Pivotisierung, die Sie auch auf der Vorlesungshomepage als `LR_kompakt_mit_Fehlern.py` finden.

```

1 import numpy as np
2
3 def LR_kompakt(A)
4     A = A.astype('float').copy()
5     n = A.shape[0]
6     p = arange(n)
7     for kk in range(n):
8         l1 = kk + np.flatnonzero[A[kk:, kk]][0]
9         A[[kk, l1]] = A[[l1, kk]]
10        p[[kk, l1]] = p[[kk, l1]]
11        A[kk+1:, kk] /= A[kk, kk]
12        A[kk+1:, kk+1:] -= A[kk+1:, [kk]] @ A[[kk], kk+1:]
13    return p

```

- Finden und korrigieren Sie die **sechs Fehler** im Quelltext und überprüfen Sie die Funktion mit geeigneten Tests.
Tipp: Es ist $P \cdot A = A[p, :]$.
- Kommentieren Sie wichtige Stellen im Quelltext sinnvoll.
- Was passiert, wenn Sie Zeile 6 durch `l1 = kk + np.argmax(abs(A[kk :, kk]))` ersetzen? Was ist der Unterschied?

Diese Aufgaben werden nicht in den Programmierübungen besprochen.