(2.38) Definition / Lemma

$\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$

$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$

A k dimensionale Mfl

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfl und

$K \subseteq M$ eine kompakte Teilmenge.

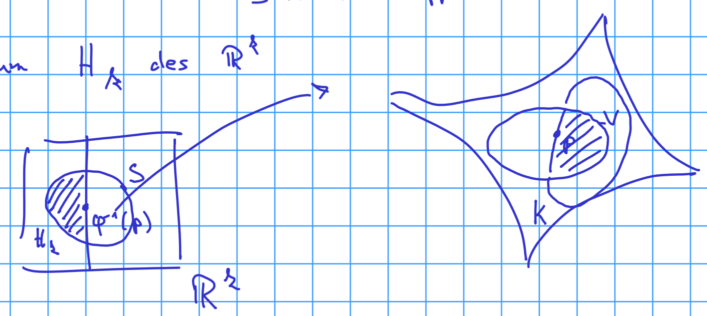
Man nennt K glatt berandet, falls es zu jedem

$p \in \partial K$ eine glatte Karte von M gibt $\varphi: S \to V \subseteq M$ $S \subseteq \mathbb{R}^k$ offen

mit $p \in V$ so dass für einen Halbraum H_k des $\mathbb{R}^k$

i) $\varphi(H_k \cap S) = K \cap V$

ii) $\varphi(\partial H_k \cap S) = \partial K \cap V$



Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ einer k-dimensionalen Mfl M heißt

eine Karte $\varphi: S \to V \subseteq M$ <u>M Rand adaptiert bzgl K</u> falls i) und ii)

gelten

Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit so können wir den bzgl K adaptierten

$\mathcal{A}$ von M positiv orientiert wählen und der daraus abgeleitete Atlas $\mathcal{A}_0$ von

∂K ist (positiv) orientiert. Die Orientierung ist die von M induzierte auf ∂K.

(2.39) <u>Satz</u> (Stokescher Integralsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $M \subseteq U$ eine orientierte k dimensionale Untermannigfaltigkeit

$(k \geq 1)$ und ω eine stetig diff'bare $(k-1)$ Form. Dann gilt für jede kompakte

Menge $K \subseteq M$ mit glatten Rand

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$$

$k-1$ Form

k Form

$(k-1)$ dim Mfl

k-dimensionale UMf

wobei ∂K die induzierte Orientierung trägt.

<u>Beweis</u> O. Forster Analysis 3

<u>Bemerkung</u>: Für $k = 1$ ist das Satz (2.8)

(2.40) <u>Folgerung</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω stetig diff'bare $(k-1)$ Form in U

Dann gilt für jede kompakte orientierte k-dimensionale

UMf $M \subseteq U$ $\int_M d\omega = 0$

Beweis Wähle $K = M$. Dann $\partial K = \emptyset$ und die Behauptung folgt aus (2.39)

(2.41) Folgerungen

a) $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

b) Für ein Gebiet U in $\mathbb{R}^2$ (offen zsh, beschränkt) gilt

$$\int_{\partial U} f\,dx_1 + g\,dx_2 = \int_U \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{für } f, g \in C^1(U)$$

c) Für ein Gebiet U in $\mathbb{R}^3$ gilt für $f: U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar

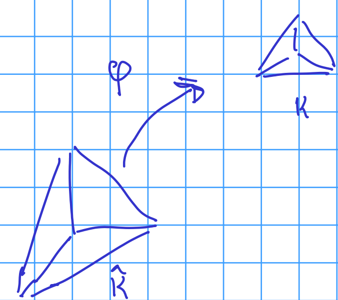
$$\int_U \operatorname{div} f \, d^3x = \int_{\partial U} f \cdot \nu \, d\sigma(x)$$

d) $$\int_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \nu \cdot \operatorname{curl} F \, d\sigma(x) = \int_{\partial S} F \, d\vec{s}$$

für 2 dim Fläche / Mfl in $\mathbb{R}^3$ $\qquad F: U \to \mathbb{R}^3 \quad C^1$

$$d\vec{S} = \begin{pmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix} \qquad d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

(2.42) Satz (Transformationsformel)



Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi: V \to U$ C^1-invertierbar

$\hat{x} \mapsto x = \varphi(\hat{x})$

Dann gilt

i) Für $\omega \in \Omega^1(U)$ mit $\omega = \sum_{j=1}^{\overset{n}{3}} f_j\,dx_j = f \cdot d\vec{s}$

gilt $\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^{\overset{n}{3}} \hat{f}_j \, d\hat{x}_j$

$$\hat{f}(\hat{x}) = \left(D\varphi(\hat{x})\right)^T f(\varphi(\hat{x})) \qquad \hat{f}(\hat{x}) = f(\varphi(\hat{x}))\, D(\varphi(\hat{x}))$$

für $D\varphi$ Jacobimatrix von φ. Das gilt auch für n beliebig $U, V \in \mathbb{R}^n$

ii) Für $\omega \in \Omega^2(U)$ mit $\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 - f_2\, dx_1 \wedge dx_3 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2$

gilt $\varphi^*\omega = \hat{f}_1\, d\hat{x}_2 \wedge d\hat{x}_3 - \hat{f}_2\, d\hat{x}_1 \wedge d\hat{x}_3 + \hat{f}_3\, d\hat{x}_1 \wedge d\hat{x}_2$

mit $$\hat{f}(\hat{x}) = \underbrace{|D\varphi(\hat{x})|}_{\text{Determinante von } D\varphi(\hat{x})} \left(D\varphi(\hat{x})\right)^{-1} f(\varphi(\hat{x}))$$

iii) Für $\omega \in \Omega^3(U)$ mit $\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

gilt $\varphi^* \omega(\hat{x}) = |D\varphi(\hat{x})|\, f(\varphi(\hat{x}))\, d\hat{x}_1 \wedge d\hat{x}_2 \wedge d\hat{x}_3$

Beweis $\boxed{ÜA}$

(2.43) Definition

Der Hodge-Operator $*$ ist eine lineare Abbildung

$$* : \Omega^k(V) \to \Omega^{n-k}(V) \quad \text{für} \quad V \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\dim(\Omega^k) = \binom{n}{k} = \dim(\Omega^{n-k}) = \binom{n}{n-k}$$

$$\omega \mapsto *\omega, \quad \text{wobei}$$

$$*(dx_1 \wedge \quad \wedge dx_k) = dx_{n-k} \wedge \quad \wedge dx_n \quad \Leftarrow \text{ Spezialfall für euklidischer Skalarprodukt}$$

$$\Big(\quad \omega \wedge \eta = \boxed{g}(\eta, *\omega)\, dx_1 \wedge \quad \wedge dx_n \quad \text{für } \eta \in \Omega^{n-k}(V)$$

Hierbei ist g ist ein nicht degeneriertes inneres Produkt auf $\left((T_pM)^{n-k}\right)^*$

(d.h. $g(\omega, \omega) \neq 0 \ \forall \omega \neq 0$ und $g(\omega, \eta) = g(\eta, \omega)$)

das von einen nicht degenerierten inner Produkt g auf $\mathbb{R}^{n^*}$ hochgehoben wird

$$g(dx_{i_1} \wedge \quad \wedge dx_{i_{n-k}}, dx_{j_1} \wedge \quad \wedge dx_{j_{n-k}}) =$$

$$\det\left(\left(g(dx_{i_l}, dx_{j_m}) \right)_{l,m=1}^{n-k} \right) \quad \Big)$$

Beispiele $n = 3$ $\qquad *(dx_1 \wedge \quad \wedge dx_k) = dx_{n-k} \wedge \quad \wedge dx_n$

1 Formen $\qquad \omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$

$$*\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2 (-1)\, dx_1 \wedge dx_3 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$*dx_2 = -dx_1 \wedge dx_3$$

$$*dx_3 = dx_1 \wedge dx_2 \qquad \Big(dx_1 \wedge \quad \wedge dx_k \wedge *(dx_1 \wedge \quad \wedge dx_k)$$

$$= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \quad \wedge dx_n$$

2. Formen $\qquad \omega = f_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + f_{13}\, dx_3 \wedge dx_1$

$$+ f_{23}\, dx_2 \wedge dx_3$$

$$*\omega = f_{12}\, dx_3 + f_{13}\, dx_2 + f_{23}\, dx_1$$

$$*(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3 \qquad *(dx_3 \wedge dx_1) = dx_2 \qquad *(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1$$

3 Maxwellgleichungen

(3.1) Maxwellgleichungen vgl. § 1

1) $-\partial_t D + \operatorname{curl} H = j$ in U, $t > 0$ — Amperesches Gesetz

2) $\partial_t B + \operatorname{curl} E = 0$ in U, $t > 0$ — Faradaysches Gesetz

3) $\underset{2}{D} = \varepsilon \underset{1}{E}$ in U

4) $\underset{2}{B} = \mu \underset{1}{H}$ in U

5) $\operatorname{div} D = \rho$

(3.2) Lemma Sind die Voraussetzungen des Stokesschen Integralsatzes erfüllt

so gilt für

$$e := E_1\, dx_1 + E_2\, dx_2 + E_3\, dx_3 \quad \text{und}$$

$$b := B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S b + \int_{\partial S} e = 0$$

Beweis: Umformulierung von 2) + Stokes (2.40)

Ebenso gilt

(3.3) Lemma

$$-\partial_t \int_S d + \int_{\partial S} h = \int_S j$$

für 2-Form d und 1-Form h

Damit die Maxwellgleichungen auf diese Art ins Differentialformkalkül passen, muss sich hinter ε und μ jeweils ein Hodgeoperator verbergen.