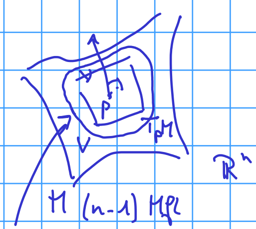
(2.36) **Satz** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ Mfl

i) M hat Orientierung σ $\Rightarrow$ $\exists!$ bzgl σ positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld

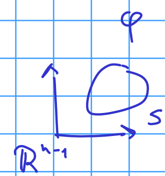
ii) M hat stetiges Einheitsnormalenfeld $\nu \Rightarrow \exists!$ Orientierung σ von M so dass ν bzgl σ positiv orientiert ist.

Beweis i) 1) Eindeutigkeit

Es gibt genau zwei Vektoren $v, -v$ der Länge 1 die in $p \in M$ auf T_pM senkrecht stehen



Für eine bzgl σ positiv orientierte Basis $(v_1 \dots v_{n-1})$ von T_pM sei



$\varepsilon := \operatorname{sign} \det([v, v_1, \dots v_{n-1}])$

Dann ist $\nu(p) = \varepsilon \cdot v$

ii) Existenz

Setze $\nu(p) = \varepsilon \cdot v$ wie eben und zeige, dass $p \mapsto \nu(p)$ stetig ist

Sei $p \in M$. In einer Umgebung von p wähle

$\tilde{\nu} = \dfrac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$ für f aus Definition 2.30. (f C^1)

ohne Einschränkung $\tilde{\nu}(p) = \nu(p)$ (sonst $\tilde{\nu}(p) = -\nu(p)$)

Sei $\varphi : \underset{\text{offen}}{T \underset{}{\cap} \mathbb{R}^{n-1}} \to V \subseteq M$ eine positiv orientierte Karte von M in einer zusammenhängenden Umgebung von p $(p \in V)$

Sei $q \in T$ mit $p = \varphi(q)$. Die Abbildung $T \to \mathbb{R}$

$r \mapsto \Delta(r) := \det\left([\tilde{\nu}(\varphi(r)), \frac{\partial \varphi}{\partial r_1}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial r_{n-1}}]\right)$

ist einer zsh Umgebung $T' \subseteq T$ von q stetig

Damit gilt $\Delta(q) > 0 \Rightarrow \Delta(r) > 0$ $\forall r \in T' \subseteq T$, da Δ stetig und T' zsh

$\Rightarrow \tilde{\nu}(\varphi(r)) = \nu(\varphi(r))$ $\forall r \in T'$

$\Rightarrow \nu$ ist in p stetig

ii) **Idee** Konstruiere einen orientierten Atlas zum stetigen Normalenfeld ν

Für $p \in M$ existiert Karte $\varphi : S \to V \ni p$ ($S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen zsh)

Die stetige Abbildung $\Delta(r) := \det\Big([\nu(\varphi(r)), \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial r_1}, \quad \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial r_{n-1}}}_{\text{Basisvektoren von } T_{\varphi(r)}M}]\Big)$

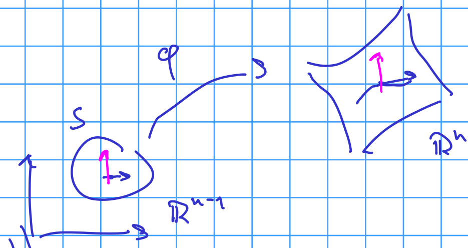
hat auf S ein Vorzeichen, da S zsh

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Karten mit

$\Delta(r) > 0$ (evtl. nimmt man statt φ das

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau \quad \text{für}$$

$$\tau : (r_1, \dots, r_{n-2}, r_{n-1}) \mapsto (r_1, \dots, r_{n-2}, -r_{n-1}))$$



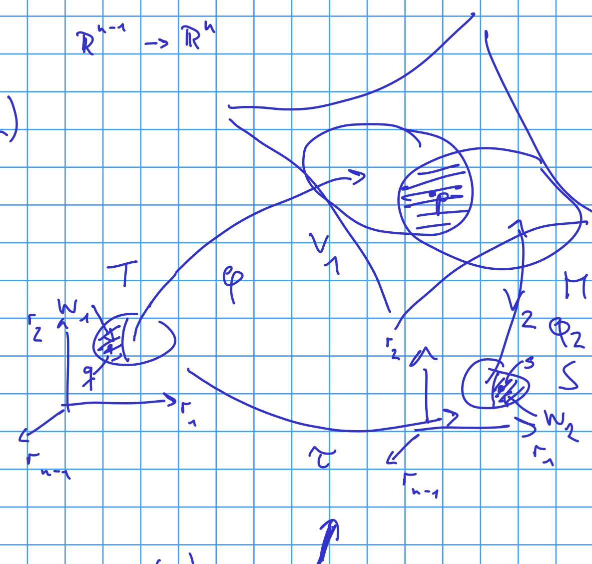
Wenn wir zeigen, dass alle Karten in $\mathcal{A}$ gleich orientiert sind, so ist $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas

⌜ $\varphi : S \to V_1 \qquad W_1 = \varphi^{-1}(V_1 \cap V_2) \qquad \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$

$\psi : T \to V_2 \qquad W_2 = \psi^{-1}(V_1 \cap V_2)$

$\tau : W_1 \to W_2 \qquad \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$

$\varphi|_{W_1} = \psi \circ \tau \quad \leftarrow$



$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \cdot a_{ij}$$

Jacobimatrix von τ

für $a_{ij} = \frac{\partial \tau_i}{\partial r_j} = (D\tau)_{ij}$ $\quad$ i,j ter Eintrag

Für $p = \varphi(q)$ $\quad p = \psi(s)$ mit $s = \tau(q)$

ist
$$\det\left(\left[\nu(p), \frac{\partial \varphi}{\partial r_1}(q), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial r_{n-1}}(q)\right]\right) > 0$$

und
$$\det\left(\left[\nu(p), \frac{\partial \psi}{\partial r_1}(s), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial r_{n-1}}(s)\right]\right) > 0$$

und damit $\det(D\tau(q)) > 0$. Also sind φ und ψ gleich orientiert. ⌟

□

(2.37) Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\quad \omega \in \Omega^{n-1}(U)$ stetig in U

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \underbrace{(-1)^i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n}_{=: dS_i} = f \cdot d\vec{S}$$

für $d\vec{S} = (dS_1, \dots, dS_n)$

$M \subseteq U$ glatte Hyperfläche durch Einheitsnormalenfeld ν orientiert, so gilt für $K \subseteq M$ kompakt

$$\int_K f \cdot d\vec{S} = \int_K \underbrace{\langle f(x), \nu(x) \rangle}_{\in \mathbb{R}} \, dS(x)$$

wobei für $h : M \to \mathbb{R}$ $\quad \int_K h(x)\, dS(x)$ das Integral über die Untermannigfaltigkeit

K der Funktion $h : K \to \mathbb{R}$ und dS das $(n-1)$ dimensionale Flächenelement ist.

⌜ Für $\underset{\text{Karte}}{\varphi : T \to V}$ $\quad T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen $\quad V \subseteq M$

ist $\quad g := \det\left(D\varphi^T D\varphi\right)$ die Gramsche Determinante

und $\quad \underbrace{\int_K h(x)\, dS(x)} := \int_{\varphi^{-1}(K)} h(\varphi(x)) \sqrt{g(x)}\, d^{n-1}x$

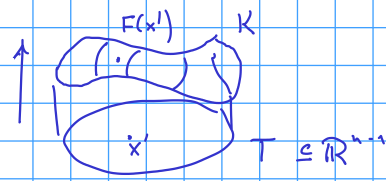
so hatten wir ← Numerik PDE über Flächen integriert ⌟

Ist K durch eine Funktion F parameterisiert; d.h

$$K = \{ (x_1 .. x_n) \in T \times \mathbb{R} \ : \ x_n = F(x_1 .. x_{n-1}) \} \qquad T \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen}$$

Graph der Funktion $T \to \mathbb{R}$

dann ist $\quad \varphi : \underbrace{(r_1 .. r_{n-1})}_{\mathbb{R}^{n-1}} \mapsto \underbrace{(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, F(r_1, .. r_{n-1}))}_{\mathbb{R}^n}$



eine Karte und

$$D\varphi = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \mathrm{grad}\, F \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad g = 1 + \|\mathrm{grad}\, F\|^2$$

<u>Beweis</u> ohne Einschränkung

$K \cap \mathrm{supp}(\omega) \subseteq V \subseteq M$ mit V Graph von $F : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

sonst betrachte eine ausreichend feine Partition der Eins

$$V := \{ (\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1}}_{= x'}, x_n) \in U' \times I \ : \ x_n = F(x') \}$$

$U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen bzw I Intervall

F stetig diffbar

Karte $\quad \varphi : U' \to V \quad \varphi(r_1 .. r_{n-1}) = (\underbrace{r_1 .. r_{n-1}}_{=: r'}, F(r'))$

$$\tilde{\nu}(x) := \frac{(-\mathrm{grad}\, F(x), 1)}{(1 + \|\mathrm{grad}\, F(x)\|^2)^{1/2}} \quad \text{für } x \in V \text{ ist Einheitsnormalenfeld} \leftarrow$$

$\nu = \varepsilon \tilde{\nu} \quad$ für $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

⌜ $\frac{\partial \varphi(q)}{\partial r_j} \quad j = 1 .. n-1 \quad$ Basis von $T_p M \quad p = \varphi(q)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial/\partial r_j F \end{pmatrix} \leftarrow j\text{te Stelle} \quad \text{steht senkrecht auf} \quad \begin{pmatrix} -\partial F/\partial r_1 \\ \vdots \\ -\partial F/\partial r_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{grad}\, F, 1)^T$$ ⌟

Es ist

$$\det\left(\left[\nu, \frac{\partial\varphi}{\partial r_1}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial r_{n-1}}\right]\right) = \frac{\varepsilon}{(1+\|\operatorname{grad} F\|^2)^{1/2}} \det \begin{bmatrix} -\operatorname{grad} F^T & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & 0 & & \\ 1 & & \operatorname{grad} F & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon\,(-1)^{n-1} \underbrace{(1+\|\operatorname{grad} F\|^2)^{1/2}}$$

φ ist positiv orientiert falls $\varepsilon\,(-1)^{n-1}$ positiv ist

$$\rightsquigarrow \int_K \omega = \varepsilon\,(-1)^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(K)} \underbrace{\varphi^*\omega}$$

$\varphi^*\omega$:

$$\varphi^*(dS_i) = (-1)^{i-1}\, dr_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dr_i} \wedge \ldots \wedge dr_{n-1} \wedge \underline{d}F(r')$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)\underline{\frac{\partial F}{\partial r_i}}\, dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{n-1} \qquad \text{für } 1 \leq i \leq n-1$$

$$\varphi^*(dS_n) = (-1)^{n-1}\, dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{n-1}$$

$$\Rightarrow \varphi^*\omega = (-1)^{n-1}\left(f_n\circ\varphi - \sum_{j=1}^{n-1}(f_j\circ\varphi)\frac{\partial F}{\partial r_j}\right) dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{n-1}$$

$$\int_K f(x)\, d\vec{S}(x) = \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(K)} G(r)\, d^{n-1}r$$

$$\text{für} \quad G(r) = f_n(\varphi(r)) - \sum_{j=1}^{n-1} f_j(\varphi(r))\frac{\partial F}{\partial r_j}(r)$$

Andererseits

$$\int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle\, dS(x) = \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(r)), \nu(\varphi(r))\rangle\,(1+\|\operatorname{grad} F(r)\|_2^2)^{1/2}\, d^{n-1}r$$

Aus

$$\nu(\varphi(r)) = \varepsilon\,\tilde{\nu}(\varphi(r)) = \frac{(-\operatorname{grad} F(r), 1)}{(1+\|\operatorname{grad} F(r)\|^2)^{1/2}}$$

folgt die Behauptung

$\square$