2.21 <u>Satz</u> $U \subseteq \mathbb{R}^n$

i) $d(\lambda\omega + \mu\sigma) = \lambda d\omega + \mu d\sigma$ äußere Ableitung ist linear auf $\Omega^k(U)$

ii) Ist $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\sigma \in \Omega^\ell(U)$ so gilt

$$d(\underset{\substack{\uparrow\\ k\text{-Form}}}{\omega} \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma \qquad \text{(Antiderivativ)}$$

iii) Ist $\omega \in \Omega^k(U)$ zweimal stetig diffbar so gilt $d(d\omega) = 0 = d \circ d(\omega)$

<u>Beweis</u> i) klar

ii) $k = \ell = 0$ (0 Formen sind Funktionen). Dann ist die Behauptung die Produktregel aus Ana I

allgemeiner Fall $k, \ell > 0$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \qquad \sigma = \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} g_{j_1 \dots j_\ell} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell}} \underbrace{f_{i_1 \dots i_k} g_{j_1 \dots j_\ell}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge d_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

$$d(\omega \wedge \sigma) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell}} (df_{i_1 \dots i_k} \cdot g_{j_1 \dots j_\ell} + f_{i_1 \dots i_k} dg_{j_1 \dots j_\ell}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge d_{j_1} \wedge \dots \wedge d_{j_\ell}$$

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} g_{j_1 \dots j_\ell} \underbrace{\sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}_{d\omega} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} dg_{j_1 \dots j_\ell} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}}$$

$$= (-1)^k \sum_{j} dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k} \wedge \underbrace{dg_{j_1 \dots j_\ell} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge d_{j_\ell}}_{d\sigma}$$

$$= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$$

iii) $k = 0$ $f : U \to \mathbb{R}$ C^2

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f \cdot dx_i$$

$$d(df) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j} f \, dx_j \wedge dx_i$$

Da f C^2 ist gilt $\partial_{x_i x_j} f = \partial_{x_j x_i} f$. Weiter ist $dx_j \wedge dx_i = - dx_i \wedge dx_j$

$dx_i \wedge dx_i = 0$

$d(df) = 0$

k beliebig $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ mit $f_{i_1 \dots i_k} \in C^2$

$\rightarrow \quad d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

und wegen $\quad d(dx_i) = d(1\, dx_i) = d1 \wedge dx_i = 0$

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \underbrace{d(df_{i_1 \dots i_k})}_{=0} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$- df_{i_1 \dots i_k} \wedge \underbrace{d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})}_{=0} = 0$$

$\square$

(2.22) Definition i) Eine stetig differenzierbare k-Form ω heißt geschlossen,

falls $\quad d\omega = 0$

ii) Eine stetige k-Form ω heißt exakt falls eine stetige differenzierbare

$(k-1)$ Form σ existiert mit $\quad \omega = d\sigma$

Die Definition von geschlossener k-Form stimmt mit der nach Satz 2.11 gegebenen für 1 Formen überein. Ein 1-Form ist genau dann geschlossen wenn sie eine Stammfunktion besitzt

Das Differential $d\omega$ einer zweimal stetig diffbaren Form ω ist wegen

$d(d\omega) = 0$ geschlossen

Damit ist eine exakte Differentialform immer geschlossen

Wann ist eine geschlossene Differentialform exakt?

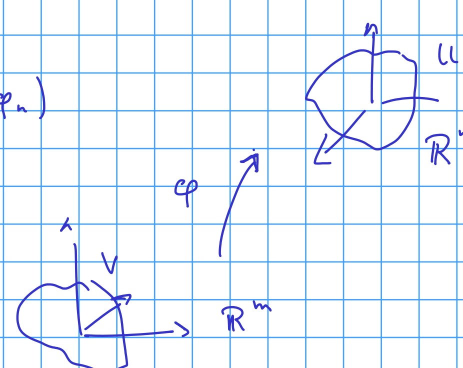
(2.23) Definition (Rücktransport / Pull back)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \quad V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen

$\varphi : V \to U$ stetig diffbar $\quad \varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$

$\omega \in \Omega^k(U)$ $\quad k$-Form auf U

$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$



Dann $\varphi^* \omega$ definiert durch

$$\varphi^* \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi)\, d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

eine k-Form auf V

$\rightsquigarrow$ Forster Analysis 3 Beispiele §19

(2.24) **Satz** (Rechenregeln)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $\varphi : V \to U$ stetig diffbar

$\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$ $\sigma \in \Omega^l(U)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

i) $\varphi^*(\lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda \varphi^* \omega_1 + \mu \varphi^* \omega_2$

ii) $\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = \varphi^* \omega \wedge \varphi^* \sigma$

iii) $d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega)$ falls φ und ω glatt genug ($z.B.$ ω C^1 φ C^2)

Beweis § 19 Satz 5

(2.25) **Satz** (Poincaré Lemma)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig offen und ω eine stetig differenzierbare geschlossene k Form für $k \geq 1$. Dann ist ω exakt.

(d.h. es gibt $(k-1)$-Form η mit $\omega = d\eta$)

Beweis § 19 Satz 6 (verwendet Pullback und Hilfssatz)

Folgerungen Für sternförmiges $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\omega \in \Omega^k(U)$ C^∞ ist

$d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ ebenfalls "C^∞" und $d \circ d\omega = 0$ und es gibt

$\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$. Damit ist die folgende Sequenz exakt

$$0 \to \underset{\smile}{\mathbb{R}} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Funktionen}}}{\Omega^0(U)} \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \ldots \to \underset{\eta}{\Omega^{k-1}(U)} \xrightarrow{d} \underset{\omega}{\Omega^k(U)} \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U) \to \quad \to \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \xrightarrow{d} 0$$

d.h. Bild und Kern stimmen überein

$$\mathrm{Im}\left(\Omega^{k-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^k(U)\right) = \mathrm{Ker}\left(\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U)\right)$$

$$\mathrm{Ker}\left(\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U)\right) = \mathbb{R}$$

In nicht sternförmigen Gebieten gilt $\mathrm{Im} \subseteq \mathrm{Ker}$ da $d \circ d = 0$

In der Topologie betrachtet man Quotientenvektorraum

$$\mathrm{Ker}\left(\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U)\right) \Big/ \mathrm{Im}\left(\Omega^{k-1}(U) \to \Omega^k(U)\right)$$

die k-te de Rahmsche Cohomologiegruppe von U

(2.26) Bemerkung $\quad n = 3$

Für $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sei $g, f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion

$u, v : U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld

$\operatorname{grad} f = \nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \partial_{x_3} f)$ Gradient von f

$\operatorname{curl} v = \operatorname{rot} v = \nabla \times v = (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2, \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3, \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1)$

Rotation von v

$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 + \partial_{x_3} v_3$

Das sind Spezialfälle der äußeren Ableitung von Differentialformen

Setzt man $\quad d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ vektorielles Streckenelement

$d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$ vektorielles Flächenelement

$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ Volumenelement

so ergeben sich für die Koordinatendarstellung

$$\omega_0 = f$$

$$\omega_1 = v \cdot d\vec{s} \quad (= v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3)$$

$$\omega_2 = u \cdot d\vec{S}$$

$$(\omega_3 = g \cdot dV)$$

$$d\omega_0 = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{s}$$

$$d\omega_1 = \operatorname{curl} v \cdot d\vec{S}$$

$$d\omega_2 = \operatorname{div} u \, dV$$

Nachrechnen

Folgerung
- Wegen $d(d\omega) = 0$ gilt

  $\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0$ und

  $\operatorname{div} \operatorname{curl} v = 0$ (falls f, v C^2 sind)

- Für $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig gilt

  i) Ist $v : U \to \mathbb{R}^3$ C^1 mit $\operatorname{curl} v = 0$ so existiert $f : U \to \mathbb{R}$ mit $v = \operatorname{grad} f$

  ii) Ist $u : U \to \mathbb{R}^3$ C^1 mit $\underline{\operatorname{div} u} = 0$ so existiert $v : U \to \mathbb{R}^3$ mit $u = \underline{\operatorname{curl} v}$

Integration über Differentialformen