· Interfacebedingungen An Materialgrenzen $[E \cdot \tau_L] = 0$

$$[E \cdot \tau_L] := [(E_1 - E_2) \cdot \tau_L]$$

· Randbedingungen

In einem leitenden Material, d.h $\sigma \gg 0$ (σ groß) ist, falls der Strom j beschränkt ist, die elektrische Feldstärke E nach dem Ohmschen Gesetz ($j = \sigma E$) sehr klein. Für einen perfekten Leiter "$\sigma = \infty$" fordert man daher $\underline{\underline{E = 0}}$ in dem Leiter und erhält aus $[E \cdot \tau_L] = 0$ am Interface zwischen Leiter und "Rest" U

$$\underbrace{[E \cdot \tau_L]}_{} = [E \times \nu] = 0$$

für L beliebige Kurve in Interface

ν: Normalenvektor auf Interface

$$E \times \nu = 0$$

als Randbedingung für das Feld außerhalb des Leiters

$E \times \nu = 0$ wird als "perfectly electric conducting" PEC Randbedingung bezeichnet

· Abstrahlbedingungen (radiation condition) "im unendlichen" $\rightsquigarrow$ später

2. Vektorfelder, Differentialformen und der Satz von Stokes

(Wdh Analysis 3)

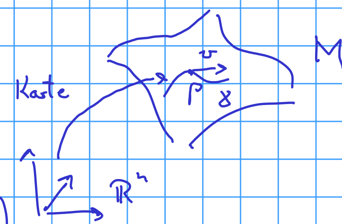
<u>Ziel</u>

	H^1	Funktionen	0-Formen	auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$	$U \to \mathbb{R}$
Ableiten		$\downarrow$ grad	$\downarrow d$		
	H^{curl}	Vektorfelder	1 Formen	Feldgrößen E, H	$U \to \mathbb{R}^3$
Ableiten		$\downarrow$ curl	$\downarrow d$		
	H^{div}	Vektorfelder	2 Formen	Flußgrößen B, D	$U \to \mathbb{R}^3$
		$\downarrow$ div	$\downarrow d$		
	L^2	Funktionen	3 Formen		$U \to \mathbb{R}$

vgl § 18 - § 21 Otto Forster Analysis 3

(2.1) Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ein n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$



Ein Vektor v heißt Tangentialvektor an M in p,

falls es für $\varepsilon > 0$ eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt (stetig diffbar)

gibt mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit $T_p(M)$

$$\to \quad T_p(M) = \{ \gamma'(0) : \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \ C^1 \text{ mit } \gamma(0) = p \}$$

Mit $T_p^*(M)$ bezeichnen wir den zu $T_p(M)$ dualen Vektorraum

$$T_p^*(M) := \{ \omega_p : \omega_p : T_p(M) \to \mathbb{R} \text{ linear} \} \leftarrow$$

Elemente aus $T_p^*(M)$ heißen Cotangentialvektoren

$$\omega_p : \gamma' \mapsto \langle \omega_p, \gamma' \rangle$$

Man kann zeigen, dass $T_p(M)$ ein Vektorraum ist (ein n-dimensionaler reeller Vektorraum)

Wir betrachten den Fall $m = n$, d.h. $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

(2.2) Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar (C^1). Das totale Differential

df von f ist eine Abbildung (eine Differentialform 1. Ordnung) $\quad (df \in \Omega^1(U))$

$$df : U \to \bigcup_{p \in U} T_p^*(U) \quad \text{mit} \quad \underline{df(p) \in T_p^*(M)}$$

für $p \in U$ mit

$$\langle df(p), v \rangle := \langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} \cdot v_i$$

für $v \in T_p(U)$

(2.3) Koordinatendarstellung einer Differentialform 1. Ordnung

Für die i-te Koordinatenfunktion $\quad x_i : \underline{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R} \quad (p_1 \ldots p_n) \mapsto p_i$

gilt für $e_j \in T_p(\underline{\mathbb{R}}^n)$ (j-te Einheitsvektor)

$$\Big\| \ \langle dx_i(p), e_j \rangle = \frac{d}{dt} x_i(p + te_j) \Big|_{t=0} = \delta_{ij} \leftarrow \ \Big\|$$

Damit bilden die Cotangentialvektoren $dx_1(p) \ldots dx_n(p)$ eine Basis von $T_p^*(\underline{\mathbb{R}}^n)$

Jeder Cotangentialvektor $\omega_p \in T_p^*(\mathbb{R}^n)$ kann dargestellt werden als

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} c_i \, dx_i(p)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten c_i

Damit läßt sich jede 1. Differentialform 1. Ordnung $\omega : U \to \bigcup_{p \in U} T_p^*(U)$

eindeutig als

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} g_i(p) \, dx_i(p)$$

für Funktionen $g_i : U \to \mathbb{R}$ darstellen

(2.4) Definition

Ein Differentialform ω heißt stetig (diffbar) falls g stetig (diffbar) ist

$(g = (g_1 \ldots g_n))$

(2.5) Lemma

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar so ist $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Beweis $\boxed{\text{ÜA}}$

(2.6) Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i \, dx_i \in \Omega^1(U)$ eine Differentialform

1. Ordnung und $\gamma : [a,b] \to U$ C^1-Kurve, dann ist das Integral

von ω über γ durch

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in T^*_{\gamma(t)}(U)}, \underbrace{\gamma'(t)}_{\in T_{\gamma(t)}(U)} \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} g_i(\gamma(t)) \, \gamma_i'(t) \, dt$$

definiert, wobei $g = (g_1 \ldots g_n)$ die Koordinatendarstellung von ω ist.

(2.7) Satz

Sei $\omega \in \Omega^1(U)$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\gamma : [a,b] \to U$ eine C^1 Kurve

und $\varphi : [a_1, b_1] \to [a,b]$ C^1 mit $\varphi(a_1) = a$ $\varphi(b_1) = b$

(Transformation von $[a_1, b_1]$ auf $[a,b]$ Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_\gamma \omega \quad \leftarrow$$

$\gamma \circ \varphi : [a_1, b_1] \to U$

<u>Beweis</u> $(\gamma \circ \varphi)'(\tau) = \gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)$ Kettenregel

Für $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ ist

$$\langle \omega(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}'(\tau) \rangle = \langle \omega(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau)) \rangle \varphi'(\tau)$$

Damit gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau) \rangle \, d\tau =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \langle \omega(\gamma(\varphi(t))), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) \, dt$$

$$= \int_{a_1}^{b} \langle \omega(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}'(t) \rangle \, dt = \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma \circ \varphi} \omega$$

□

(2.8) <u>Satz</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $f: U \to \mathbb{R}$ C^1 und

$\gamma : [a, b] \to U$ stetig und stückweise stetig diffbar

mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$ Dann gilt

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p)$$

<u>Beweis</u> ohne Einschränkung γ stetig diffbar, sonst betrachten wir jedes stetig diffbare Teilstück für sich

Es ist $\langle df(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \, \gamma_i'(t)$

$$= \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

Damit gilt

$$\int_\gamma df = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt = f(q) - f(p)$$

□

(2.9) <u>Definition</u>

Für eine stetige Differentialform ω auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von ω, falls

$$df = \omega .$$