(10.42) Definition

$$H^{\mathrm{curl},s}(\Omega) := \left\{ u \in \left(H^s(\Omega)\right)^3 : \ \mathrm{curl}\, u \in \left(H^s(\Omega)\right)^3 \right\}$$

Für $s = 0$ ist $H^{\mathrm{curl}}(\Omega) = H^{\mathrm{curl},0}(\Omega)$ $\qquad \left(H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \right)$

(10.43) Satz

Sei $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eine Familie regulärer Triangulierungen ("regulär" glm für h) von Ω. Ist $u \in H^{\mathrm{curl},s}(\Omega)$, $1/2 + \delta \le s \le k+1$, $\delta > 0$, k Ordnung f.E. Raum, so gibt es C so dass

$h_K / \rho_K < \mathrm{const} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$

$$\| u - r_h u \|_{\mathrm{curl},\Omega} \le C h^s \left(\|u\|_{s,\Omega} + \|\mathrm{curl}\, u\|_{s,\Omega} \right)$$

für C unabhängig von u und h (abhängig von s)

Beweisskizze $\qquad s \in \mathbb{N}$

Es gilt folgende Skalierung $\quad \Phi_K : \hat{K} \to K \quad \hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K$

$\to \quad |\hat{u}|_{s,\hat{K}} \le C h_K^{s-1/2} |u|_{s,K} \qquad h_K$ Durchmesser von K

und $\quad |\mathrm{curl}\, \hat{u}|_{s,\hat{K}} \le C h_K^{s+1/2} |\mathrm{curl}\, u|_{s,K}$

[

$\hat{u} = B_K^T u \circ \Phi_K \quad$ gilt $\quad \alpha \in \mathbb{N}_0^3$

$$\partial^{|\alpha|} / \partial \hat{x}^\alpha \, \hat{u} = B_K^T \, \partial^{|\alpha|} / \partial \hat{x}^\alpha \left(u \circ \Phi_K \right)$$

Lemma (10.15) $\qquad |\alpha| = m$

$$\left\| \partial^{|\alpha|} / \partial \hat{x}^\alpha \, \hat{u} \right\|_{0,\hat{K}} \le C \underbrace{\|B_K\|}_{\sim h_K}{}^{|\alpha|} \|B_K\| \underbrace{|\det B_K|}_{\sim h_K^3}{}^{-1/2} \left\| \partial^{|\alpha|} / \partial x^\alpha \, u \right\|_{0,K}$$

$$\le C h_K^{|\alpha| - 1/2} \left\| \partial^{|\alpha|} / \partial x^\alpha \, u \right\|_{0,K}$$

analog für curl

]

$$\| u - r_h u \|_{0,\Omega} \qquad \boxed{\| \mathrm{curl}(u - r_h u) \|_{0,\Omega}}$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \| u - r_h u \|_{0,K}$$

$$\| u - r_h u \|_{0,K} \le |\det B_K|^{1/2} \|B_K^{-1}\| \, \| \hat{u} - \widehat{r_h u} \|_{0,\hat{K}} \le C h_K^{1/2} \| \hat{u} - \widehat{r_K u} \|_{0,\hat{K}}$$

Aus der Invarianz von R_K (Lemma 10.33) und (Lemma 10.33)

folgt $\widehat{r_K u} = r_{\hat{K}} \hat{u}$

$$\| \hat{u} - \hat{r}_K \hat{u} \|_{0,\hat{K}} = \| (I - r_K) \hat{u} \|_{0,\hat{K}}$$

Man kann zeigen dass r_K beschränkt ist. Damit

$$\| (I - r_{\hat{K}}) (\hat{u} + \hat{\phi}) \|_{0,\hat{K}} \leq C \| \hat{u} + \hat{\phi} \|_{s,\hat{K}} + \| \operatorname{curl} (\hat{u} + \hat{\phi}) \|_{s,\hat{K}}$$

Mit Satz (10.16) gilt dann

$$\inf_{\phi \in (\mathbb{P}^k)^3} \| (I - r_{\hat{K}}) (\hat{u} + \hat{\phi}) \|_{0,\hat{K}} \leq C | \hat{u} |_{s,\hat{K}} + | \operatorname{curl} \hat{u} |_{s,\hat{K}}$$

Verwendet man die Skalierung so erhält man

$$\| u - r_K u \|_{0,K} \leq C h_K^s \left(|u|_{s,\hat{K}} + | \operatorname{curl} u |_{s,\hat{K}} \right)$$

$\vdots$

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} E + \kappa^2 E = F & \text{in } \Omega \\ \nu \times E = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Suche Lösung in $H_0^{\operatorname{curl}}(\Omega)$

(10.44) Definition

$$X_h := \{ u \in H_0^{\operatorname{curl}}(\Omega) : u_{|K} \in R_k \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \leq V_h \leq H^{\operatorname{curl}}(\Omega)$$

$P_h : H_0^{\operatorname{curl}}(\Omega) \longrightarrow X_h$ $\quad H_0^{\operatorname{curl}}$ orthogonale Projektion

$$\int_\Omega \operatorname{curl} (u - P_h u) \cdot \operatorname{curl} \phi_h \, dx + \int_\Omega (u - P_h u) \cdot \phi_h \, dx = 0 \qquad \forall \phi_h \in X_h$$

$$\| u - P_h u \|_{\operatorname{curl},\Omega} = \inf_{v \in X_h} \| u - v_h \|_{\operatorname{curl},\Omega}$$

(10.45) Definition

Sei $S_h := \{ p \in H_0^1(\Omega) : p|_K \in \mathbb{P}^k \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \leq U_h \leq H^1(\Omega)$

so definieren wir $u \in (L^2(\Omega))^3$ ist diskret divergenzfrei, falls

$$\int_\Omega u \cdot \nabla \phi_h \, dx = 0 \qquad \forall \phi_h \in S_h$$

Es gilt $\nabla S_h \subseteq X_h$ und es gibt es eine diskrete Helmholtzzerlegung

$$X_h = \tilde{X}_h \oplus \nabla S_h$$

wobei $\tilde{X}_h$ der Raum der diskret divergenzfreien f. E in X_h ist

(10.46) Definition

$$Y_h := \{ u \in H_0^{div}(\Omega) : u|_K \in \mathcal{D}_\Omega \ \forall K \in \mathcal{T}_h \} \leq Q_h$$

(10.47) Lemma

Sei $\mathcal{T}_h$ reguläre Triangulierung und $u \in (H^{1/2+\delta}(\Omega))^3$ für $\delta > 0$

mit $\operatorname{curl} u \in Y_h$ so gibt es C

so, dass $\| u - r_h u \|_{0,\Omega} \leq C \left(h^{1/2+\delta} \| u \|_{1/2+\delta,\Omega} + h \| \operatorname{curl} u \|_{0,\Omega} \right)$

(10.48) Lemma

Es gibt zu $u_h \in \tilde{X}_h$ ein $v_h \in \operatorname{curl} X_h \leq Y_h$

mit $\int_\Omega u_h \cdot \phi_h \, dx = \int v_h \cdot \operatorname{curl} \phi_h \quad \forall \phi_h \in X_h$

$$\text{"} u_h = \operatorname{curl} v_h \text{"}$$

<u>Notation</u> $a(u,v) = \int_\Omega \operatorname{curl} u \cdot \operatorname{curl} v - \kappa^2 u \cdot v \, dx$

Falls E_h approximative Lösung existiert

$e_h := E - E_h$ Fehler

$\leadsto a(e_h, \phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in X_h \quad \leftarrow$

Wählt man $\phi_h = \nabla \xi_h$ für $\xi_h \in S_h$ so sieht man dass

e_h diskret divergenz frei ist.

(10.49) Lemma

Unter der obigen Annahmen gilt

$$\| e_h \|_{\operatorname{curl},\Omega} \leq \| E - P_h E \|_{\operatorname{curl},\Omega} + C \sup_{v_h \in X_h} \frac{|(e_h, v_h)_{0,\Omega}|}{\| v_h \|_{\operatorname{curl},\Omega}}$$

für C unabhängig von E, E_h und h

<u>Beweis</u> $C = 1 + \kappa^2 \ldots$

$\square$

Zur Abschätzung von $\displaystyle \sup_{v_h \in X_h} \frac{|(e_h, v_h)_{0,\Omega}|}{\| v_h \|_{\operatorname{curl},\Omega}}$

definiert man eine nahe gelegene divergenzfreie Funktion v^h über ein Sattelpunktproblem. Mit Hilfe von (9.13) erhält man die Existenz von v^h und kann zeigen

(10.50) Lemma

$$\| v^h - v_h \|_{0,\Omega} \leq C h^{1/2+\delta} \| \operatorname{curl} v_h \|_{0,\Omega}$$

Der Beweis von 10.50 verwendet eine Regularitätsabschätzung (falls Ω konvex) aus [ABDG], die Beschränktheit von r_h und $\operatorname{curl} r_h u^h = w_h \operatorname{curl} v^h$ ...

□

(10.51) Lemma

Ist h klein genug so gilt es C und $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ so dass

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{|(e_h, v_h)_{0,\Omega}|}{\| v_h \|_{\operatorname{curl},\Omega}} \leq C h^{\delta + 1/2} \| e_h \|_{\operatorname{curl},\Omega}$$

(10.52) Satz

Sei Ω ein einfach zsh. konvexes Lipschitz Gebiet und sei κ kein Eigenwert so gibt es Konstante C und h_0 so dass für $h \in [0, h_0]$

$$\| E - E_h \|_{\operatorname{curl},\Omega} \leq \frac{1}{1 - C h^{1/2+\delta}} \inf_{v_h \in X_h} \underbrace{\| E - v_h \|_{\operatorname{curl},\Omega}}_{\sim h^s \text{ für } 1/2+\delta < s \leq k}$$

falls $u \in H^{\operatorname{curl},s}(\Omega)$ für $s \in (1/2, k]$