

(10.17) Definition

Sei $v_1, \dots, v_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ ($d+1$) Punkte in allgemeiner Lage

d.h. $\det \begin{pmatrix} v_1 - v_{d+1} & v_2 - v_{d+1} & \dots & v_d - v_{d+1} \end{pmatrix} \neq 0$

(Die $d+1$ Punkte bilden dann ein Simplex K)

Die baryzentrische Koordinate des Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ $\lambda_j(x)$

bezüglich des Punktes v_j ist das eindeutige Polynom von Grad 1

mit $\lambda_j(v_i) = \delta_{ij}$



Damit lässt sich sog. lineare ($\mathbb{P}_K \subseteq \mathbb{P}^1(K)$) H^1 -konforme finite Elemente definieren.

(10.18) Definition (vgl. Num. PDE)

Das klassische H^1 -konforme finite Element niedrigster Ordnung ($k=1$)

für den Simplex K ($d=1$ offenes Intervall, $d=2$ Dreieck, $d=3$ Tetraeder)

ist gegeben durch Funktionenraum

$$\mathbb{P}_K = \mathbb{P}^1(K) \quad \text{mit} \quad \dim \mathbb{P}^1 = d+1$$

und Freiheitsgrade

Eckpunkte des Simplex K

$$N_i^v : u \mapsto u(v_i) \quad \text{für} \quad v_i \in \mathcal{V}(K)$$

(10.19) Definition

Ein finites H^1 -konformes Element der Ordnung $k=2$ ist gegeben durch

$$\mathbb{P}_K = \mathbb{P}^2(K) \quad \text{mit} \quad \dim \mathbb{P}^2 = \begin{cases} 6 & d=2 \\ 10 & d=3 \end{cases}$$

und zwei Arten von Freiheitsgraden

- denen aus (10.18) sog. punkt-basierte Freiheitsgrade

$$N_i^v : u \mapsto u(v_i) \quad \text{für} \quad v_i \in \mathcal{V}(K) \quad \text{und}$$

- kanten-basierter Freiheitsgrade

$$N_e^E : u \mapsto \int_{e_x} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d\mathbf{g}_e}{ds} ds \quad \text{für} \quad e_x \in \mathcal{E}(K)$$

mit Kanten Subfunktion $g_e \in \mathbb{P}_0^2(e_x) \leftarrow$ Polynom von Grad ≤ 2

auf e_x mit Wert 0 in den Randpunkten

$$\text{nd } \int_{e_x} g_{fe}^2 ds = 1$$



Die baryzentrischen Koordinaten auf dem Referenzdreieck / Referenztetraeder... \hat{K}

bilden eine nodale Basis der finiten Elemente aus (10.18)

$$\text{Wir setzen } \hat{\phi}_j^v(\hat{x}) = \hat{\lambda}_j(\hat{x}) \quad \text{für } j = 1 \dots d+1$$

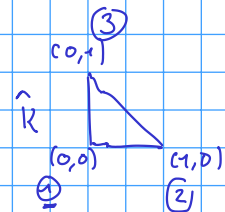
Eine nodale Basis der finiten Elemente aus

(10.19) erhält man durch

$$\rightarrow \hat{\phi}_j^v(\hat{x}) = \hat{\lambda}_j(\hat{x}) \quad j = 1 \dots d+1 \quad v_j \in \mathcal{V}(K)$$

$$\text{nd } \hat{\phi}_\alpha^E(\hat{x}) = \hat{\lambda}_{v_1}(\hat{x}) \hat{\lambda}_{v_2}(\hat{x}) \quad \text{für}$$

$$\text{Kante } e_x = (v_1, v_2) \in \mathcal{E}(K)$$



$$\hat{\lambda}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \quad \leftarrow$$

$$\hat{\lambda}_2(\hat{x}) = \hat{x}_1 \quad \leftarrow$$

$$\hat{\lambda}_3(\hat{x}) = \hat{x}_2$$

Durch $\bar{\Phi}_K : \hat{K} \rightarrow K$ erhalten wir durch die Transformation

$$u := \hat{u} \circ \bar{\Phi}_K^{-1} \quad u \circ \bar{\Phi}_K = \hat{u}$$

Basisfunktionen auf K

Identifiziert man für (zwei Dreiecke / Tetraeder...) K_i und K_j aus einer

Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}_h = \{ K_i \}_{i=1}^{n_c}$ die punktbasierete Freiheitsgrade

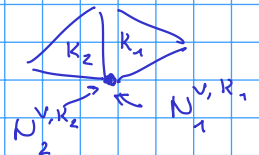
die zu einem gemeinsamen Punkt von K_i und K_j gehören und die

Kantenbasierete Freiheitsgrade die zu einer gemeinsamen Kante gehören,

so erhält man finite Elemente auf $\bar{\mathcal{T}} = \bigcup_{i=1}^{n_c} \bar{K}_i$

$$U_{h,1} = \bigoplus_{v_i \in \mathcal{V}} \text{span} \left\{ \hat{\phi}_i^v \right\}$$

$$U_{h,2} = \bigoplus_{v_i \in \mathcal{V}} \text{span} \left\{ \hat{\phi}_i^v \right\} \oplus \bigoplus_{e_x \in \mathcal{E}} \text{span} \left\{ \hat{\phi}_\alpha^E \right\}$$



(10.20) Lemma

Die finiten Elemente aus (10.18) und (10.19) sind ^{sind} unisolvant und

die finiten Elementräume sind H^1 -konform

Beweis

(10.18) ist unisolvant da für $p \in \mathbb{P}^1$ mit $N_j^v(p) = 0$ für $j=1..d+1$

folgt das $p = 0$ $p(X) = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$

(10.19) ist unisolvant da auf

$N_j^v(p) = 0$ für $j=1..d+1$ folgt dass p in der Ecke Null ist

Für eine Kante $e_\alpha = (v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2})$ ist dann $g_e \in \mathbb{P}_0^2$

$$\int_{e_\alpha} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial g_e}{\partial s} ds = - \int_{e_\alpha} p \frac{\partial^2 g_e}{\partial s^2} ds. \text{ Damit folgt}$$

$N_\alpha^E(p) = 0$ dass $\int_{e_\alpha} p ds = 0$ (da $g_e \in \mathbb{P}_0^2$ und damit $\frac{\partial^2 g_e}{\partial s^2} = \text{const}$)

und damit ist $p = 0$ auf der Kante (da $p \in \mathbb{P}_0^2$)

$p = \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} r$ für Polynom von Grad 0)

Die H^1 -Konformität folgt aus der globalen Stetigkeit der λ_j und

Lemma (8.20) □

Mit Hilfe der H^1 -Konformität ergibt sich

$$U_{h,K} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_K \in \mathbb{P}^k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

Nédélec Kantenlemente für $H^{\text{curl}}(\Omega)$

Davon gibt es zwei Arten/Typen. Nédélec Elemente zweiter Art verwenden als Funktionsraum $\mathbb{P}_K \quad \mathcal{N}_K^{\text{II}}(K) := (\mathbb{P}^k(K))^d$

Nédélec Elemente erster Art verwenden den Funktionsraum

$$\mathcal{N}_K^{\text{I}}(K) := (\mathbb{P}^k)^d \oplus \left\{ q \in (\tilde{\mathbb{P}}^{k+1})^d : x \cdot q = 0 \right\} \leftarrow$$

(zu den Polynomen $(\mathbb{P}^k)^d$ werden Polynome hinzugefügt so dass

$$\text{curl } \mathcal{N}_K^{\text{I}}(K) = (\mathbb{P}^k)^d$$

Bemerkung • In Monk Abschnitt 5.5 werden

$\mathcal{N}_K^{\text{I}}(K)$ als Raum der Ordnung $k+1$ bezeichnet

Bei Monk fällt die niedrigste Ordnung bei 1 an, bei uns bei 0

Dort wird $S_K = \left\{ q \in (\tilde{\mathbb{P}}^k)^d : x \cdot q = 0 \right\} \leftarrow$

und $R_k = \mathcal{N}_{k-1}^I(K)$

• Ist $p \in (\tilde{\mathbb{P}}^k)^d$ so ist $x \cdot p \in \tilde{\mathbb{P}}^{k+1} \leftarrow$

Die Dimension $\mathcal{N}_k^I(K)$ ist also

$$d \cdot \dim \mathbb{P}^k(K) + d \cdot \dim \tilde{\mathbb{P}}^{k+1} - \dim \tilde{\mathbb{P}}^{k+2}$$

(10.21) Definition

Das Nédélec Element erster Art niedrigster Ordnung ($k=0$)

auf einem Dreieck oder Tetraeder K ist gegeben durch

- den Funktionenraum

für $d=2$ $\mathcal{N}_0^I(K) := \left\{ a + b \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R} \right\} \leftarrow$

$\dim \mathcal{N}_0^I(K) = 3$

und für $d=3$

$\mathcal{N}_0^I(K) := \left\{ a + b \overset{\text{Kreuzprodukt}}{\downarrow} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^3 \right\} \leftarrow$

$\dim \mathcal{N}_0^I(K) = 6$

- die Freiheitsgrade

$N_x^E : u \mapsto \int_{e_x} u \cdot \tau \, ds$ für $e_x \in \mathcal{E}(K)$

Wegintegrale der Tangentialkomponente entlang der Kante des Dreiecks/Tetraeders

(τ Einheits tangentialvektor zur Kante $e_x = (v_{x_1}, v_{x_2})$)

$$\tau = \frac{v_{x_2} - v_{x_1}}{\|v_{x_2} - v_{x_1}\|}$$



(10.22) Lemma

Die nodale Basis der Nédélec Elemente niedrigster Ordnung aus (10.21)

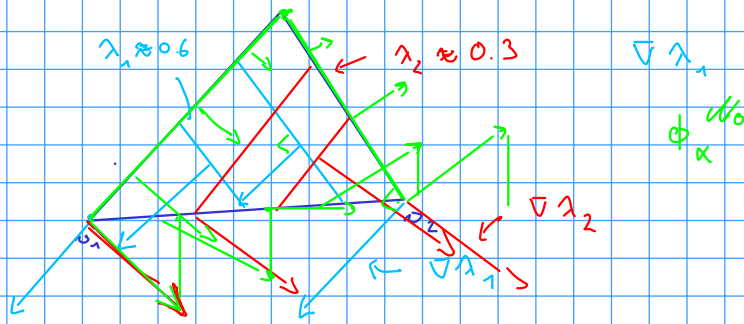
ist

$\phi_x^{\mathcal{N}_0} := (\nabla \lambda_{v_1}) \lambda_{v_2} - \lambda_{v_1} \nabla \lambda_{v_2}$ für Kante $e_x = (v_1, v_2) \in \mathcal{E}(K)$

Es gilt

(□) $\phi_x^{\mathcal{N}_0} \cdot \tau_{e_p} |_{e_p} = \frac{1}{|e_p|} \delta_{xp}$ für Kanten e_x, e_p

$|e_p|$: Länge der Kante e_p



Beweis

Der Beweis von (7) $\overline{|\lambda|}$