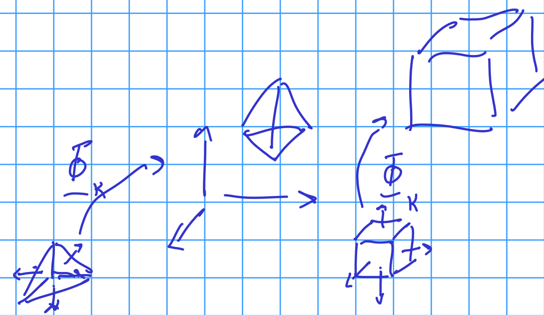
(10.12) Lemma

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ mit nichtleerem Innere

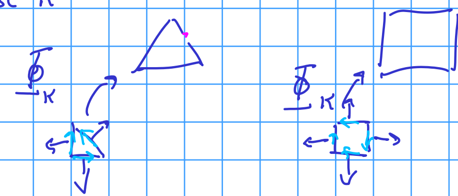
$\Phi : \hat{K} \to K$ Diffeomorphismus



d=3

$\hat{\nu}$ Normalenvektor von $\hat{K}$

$\hat{\tau}$ Tangentialvektor tangential am Rand K von $\hat{K}$



d=2

$$\nu(x) = \frac{F_K^{-T}\hat{\nu}(\hat{x})}{\| F_K^{-T}\hat{\nu}\|_2} \qquad x = \Phi_K(\hat{x})$$

$$\tau(x) = \frac{F(\hat{x})\,\hat{\tau}(\hat{x})}{\| F_K(\hat{x})\,\hat{\nu}(\hat{x})\|_2}$$

Normalen und Tangentialvektoren auf den Rand von K

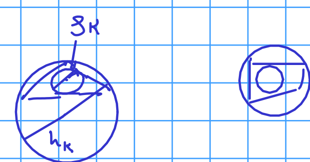
$x \in \partial K \qquad \hat{x} \in \partial \hat{K}$

(10.13) Definition (Nachtrag zu 10.10)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ Lipschitzgebiet mit nichtleeren Inneren

Mit h_K bezeichnen wir den Durchmesser von K, d.h. den Durchmesser der/des kleinsten Kugel / Kreises die K enthält

und mit ϱ_K den Inkreis / Inkugeldurchmesser von K, d.h. den Durchmesser der größten Kugel die in K enthalten ist



(10.14) Lemma (vgl. Num PDE / Mori Lemma 5.10)

Sei $\Phi_K : \hat{K} \to K \quad \hat{x} \mapsto B_K\hat{x} + b_K = x$ mit $\det(B_K) \neq 0$

bijektiv, dann gilt ($K, \hat{K}$ Lipschitzgebiete in $\mathbb{R}^d$ mit nichtleeren Inneren)

1) $\|B_K\|_2 \leq \dfrac{h_K}{\varrho_{\hat{K}}}$ und 2) $\|B_K^{-1}\|_2 \leq \dfrac{h_{\hat{K}}}{\varrho_K}$

und es gibt Konstanten C_1 und C_2 so, dass

3) $C_1\,\varrho_K^d \leq |\det B_K| \leq C_2\, h_K^3$

Beweis

$$\|B_K\|_2 := \sup_{\|\xi\|_2 = 1} \|B_K\xi\|_2 = \frac{1}{\varrho_{\hat{K}}} \sup_{\|\xi\|_2 = 1} \|B_K\,\varrho_{\hat{K}}\,\xi\|_2$$

$$= \frac{1}{\varrho_{\hat{K}}} \sup_{\|\xi\|_2 = \varrho_{\hat{K}}} \|B_K\xi\|_2$$

Zu ξ mit $\|\xi\| = \varrho_{\hat{K}}$ gibt es $\hat{x}$ und $\hat{y} \in \hat{K}$ mit $\xi = \hat{x} - \hat{y}$

Dann ist

$B_K \xi = B_K \hat{x} - B_K \hat{y} = \Phi_K(\hat{x}) - \Phi_K(\hat{y})$. Da $\Phi_K(\hat{x})$ und $\Phi_K(\hat{y}) \in K$

ist $\underbrace{\| \Phi_K(\hat{x}) - \Phi_K(\hat{y}) \|_2}_{B_K \xi} < h_K$

$\Rightarrow \| B_K \|_2 \leq h_K / \rho_{\hat{K}}$

Der Beweis von 2) geht analog

Die dritte Abschätzung folgt aus $|\det(B_K)| = \mathrm{vol}(K) / \mathrm{vol}(\hat{K})$

da $\mathrm{vol}(K) = \int_K 1 \, dx = \int_{\Phi_K(\hat{K})} 1 \, dx =$

$$= \int_{\hat{K}} 1 \, |\det(B_K)| \, d\hat{x} = |\det(B_K)| \int_{\hat{K}} 1 \, d\hat{x} = |\det(B_K)| \, \mathrm{vol}(\hat{K})$$

□

(10.15) <u>Lemma</u> (vgl. Num PDE Monk (5.9))

Sei $\Phi_K : \hat{K} \to K$, $\hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K$ mit $\det(B_K) \neq 0$ bijektiv

Sei weiter $\hat{p} : \hat{K} \to \mathbb{R}$, dann ist für $m \geq 0$ die Abbildung

$$\hat{p} \mapsto p = \hat{p} \circ \Phi_K^{-1} \quad (p : K \to \mathbb{R}) \text{ ein Isomorphismus}$$

von $H^m(\hat{K}) \to H^m(K)$ und es gilt

$$|\hat{p}|_{m,\hat{K}} \leq \| B_K^T \|_2^m \, |\det B_K|^{-1/2} \, |p|_{m,K}$$

$$\to \quad |p|_{m,K} \leq \| B_K^{-T} \|_2^m \, |\det B_K|^{1/2} \, |\hat{p}|_{m,\hat{K}}$$

<u>Beweis</u> hier nur für $m = 1$

$\hat{p} = p \circ \Phi_K \Rightarrow \hat{\nabla} \hat{p} = B_K^T \nabla p$ (Gradient Spaltenvektor)

$\nabla p = B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{p}$

$$\left(\int_{\hat{K}} \| \hat{\nabla} \hat{p} \|_2^2 \, d\hat{x} \right)^{1/2} = \left(\int_K \| B_K^T \nabla p \|_2^2 \frac{1}{|\det B_K|} \, dx \right)^{1/2}$$

und $\left(\int_K \| \nabla p \|_2^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\hat{K}} \| B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{p} \|_2^2 \, |\det B_K| \, d\hat{x} \right)^{1/2}$ ←

$$\Rightarrow \int_K \| \nabla p \|_2^2 \, dx \leq \| B_K^{-T} \|_2^2 \int_K \| \hat{\nabla} \hat{p} \|_2^2 \, |\det B_K| \, d\hat{x}$$

und

$$\int \| \hat{\nabla} \hat{p} \|_2^2 \, dx \leq \| B_K^T \|_2^2 \int_K \| \nabla p \|_2^2 \frac{1}{|\det B_K|} \, dx$$

□

(10.16) Satz (Monk 5.5)

Sei K Lipschitzgebiet $\subseteq \mathbb{R}^d$ $d = 2,3$ und $k \in \mathbb{N}_0$ Dann gibt es eine Konstante C so, dass

1) Falls $p \in H^s(K)$ für $0 \leq s \leq k+1$ so ist

$$\inf_{\phi \in \mathbb{P}^k} \| p + \phi \|_{s,K} \leq C \, | p |_{s,K}$$

2) Falls $v \in (H^s(K))^d$ für $0 \leq s \leq k+1$ so ist

$$\inf_{\phi \in (\mathbb{P}^k)^d} \| v + \phi \|_{s,K} \leq C \, | v |_{s,K}$$

3) Falls $v \in (H^s(K))^3$ und $\operatorname{curl} v \in (H^s(K))^3$ für $0 \leq s \leq k+1$ so ist

$$\inf_{\phi \in (\mathbb{P}^{k-1})^3} \left(\| v + \phi \|_{s,K} + \| \nabla \times (v + \phi) \|_{s,K} \right)$$

$$\leq C \left(| v |_{s,K} + | \nabla \times v |_{s,K} + | \nabla \times v |_{[s],K} \right)$$

mit $[s]$ ganzzahliger Anteil von s

C hängt nicht von p bzw v ab, aber von K und s ab.

Beweisskizze (Für $s \in \mathbb{N}$ wurde 1) schon in Num PDE bewiesen)

Für den Beweis brauchen wir noch ein Lemma:

Lemma Die Interpolationsaufgabe: Finde ein Polynom

$p \in \mathbb{P}^k$ das vorgegebene Werte in

vier Eckpunkte von K

($d = 3$) 1) Punkten $L_k(K)$ im Tetraeder $K = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$L_k(K) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 \quad x = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j v_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{4} \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \in \{0, 1/k, 2/k \ldots k-1/k, 1\} \quad j = 1..4 \Big\}$$

oder

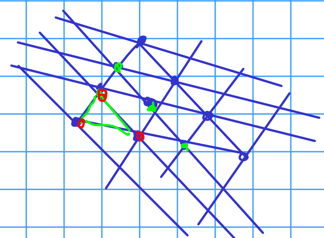
drei Ecken

($d = 2$) 2) Punkten $L_k(K)$ im Dreieck $K = (v_1, v_2, v_3)$

$$L_k(K) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad x = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j v_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \in \{0, 1/k, 2/k, \ k-1/k, 1\} \Big\}$$

interpoliert, ist eindeutig lösbar

Beweisidee 2) vgl Num PDE



Lemma 5.7 Monk

$\square$

Weiter im Beweis (10.16)

Sei $\tilde{k}$ die größte ganze Zahl kleiner gleich s.

Da $s \le k+1$ ist ($k \ge \tilde{k}$)

$$\inf_{\phi \in \mathbb{P}^{k}} \| p + \phi \|_{s,K} \le \inf_{\phi \in \mathbb{P}^{\tilde{k}}} \| p + \phi \|_{s,K}$$

Sei n Dimension von $\mathbb{P}^{\tilde{k}}$ und $\{N_\ell\}_{\ell=1}^{n}$ ein Basis von $\mathbb{P}^{\tilde{k}\,\prime}$

(N_ℓ können Punktauswertungen in $L_{\tilde{k}}(K)$ sein)

Nach Hahn-Banach lassen sich die N_ℓ zu Linearformen auf $H^s(K)$

fortsetzen so, dass falls für

$$\phi \in \mathbb{P}^{\tilde{k}}(K) \qquad N_\ell(\phi) = 0 \quad \forall \ell = 1..n \iff \phi = 0$$

Es gibt eine Konstante C so, dass für $p \in H^s(K)$

(*) $$\|p\|_{s,K} \le C\left(|p|_{s,K} + \sum_{j=1}^{n} |N_j(p)| \right)$$

⌜Widerspruchsbeweis:

Angenommen es gibt kein C mit dieser Eigenschaft, dann existiert Folge

$(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq H^s(K)$ mit $\|p_i\|_{s,K} = 1$ und

$\rightarrow$ $|p_i|_{s,K} + \sum_{j=1}^{n} |N_j(p_i)| \le 1/i$

Man verwendet jetzt (das muss noch gezeigt werden) dass $H^s(K)$

kompakt in $H^{\tilde{k}}(K)$ eingebettet ist. ($\tilde{k} \le s$)

Dann gibt es konvergente Teilfolge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $H^{\tilde{k}}(K)$

(die wieder mit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnet wird) $p_i \xrightarrow{\|\cdot\|_{\tilde{k},K}} p$

$|p_i|_{s,K} \le 1/i$. Damit konvergiert $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $H^s(K)$

Aus $|p_i|_{s,K} \le 1/i$ folgt $|p|_{s,K} = 0$

Also ist $p \in \mathbb{P}^{\tilde{k}}$

Aus $N_j(p) = 0$ für $j = 1..n$ folgt damit $p = 0$ ↯ zu $\|p\|_{s,K} = 1$ ┘

(*) $\|p\|_{s,K} \leq C \left(|p|_{s,K} + \sum_{j=1}^{n} |N_j(p)| \right)$

Wendet man (*) auf $p + \phi$ für $\phi \in \tilde{\mathbb{P}}^{k}$ an, so erhält man

$$\|p + \phi\|_{s,K} \leq C \left(\underbrace{|p + \phi|_{s,K}}_{= |p|_{s,K}} + \sum_{j=1}^{n} |N_j(p + \phi)| \right)$$

Wählt man ϕ so dass $N_j(p + \phi) = 0$ für $j = 1..n$

so ist 1) bewiesen

2) Komponentenweise Anwendung von 1)

3) Analog zu 1) $\square$