(9.9) Lax Milgram

$a : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear, beschränkt und koerziv ($\mathbb{R}$ bilinear symmetrisch bd $\swarrow M$ koerziv $\swarrow \alpha$)

dann gibt es für $f' \in H'$ genau eine Lösung u von $a(u,v) = f'(v) \quad \forall v \in V$

$$\|u\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \|f\|_{H'}$$

(9.13) Satz (Brezzi)

Seien $(H, (\ )_H)$ und $(G, (\ )_G)$ Hilberträume und

$a : H \times H \to \mathbb{C}$ und $b : H \times G \to \mathbb{C}$ beschränkte Sesquilinearformen

mit i) a sei auf dem Kern von b koerziv, d.h. für

$$H_0 = \{ u \in H : b(u,f) = 0 \quad \forall f \in G \} \quad \text{„Kern von } b\text{"}$$

gibt es $\alpha > 0$ so dass für $v \in H_0$

$$|a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_H^2$$

ii) b erfüllt die LBB Bedingung (Ladyzhenskaja-Babuška-Brezzi)

d.h $\exists \beta > 0 \quad \forall f \in G$

$$\sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|b(u,f)|}{\|u\|_H} \geq \beta \|f\|_G$$

äquivalent dazu

$\exists \beta > 0$

$$\inf_{\substack{f \in G \\ f \neq 0}} \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|b(u,f)|}{\|u\|_H \|f\|_G} \geq \beta$$

Dann existiert für $\varphi \in H'$ und $\psi \in G'$ eine eindeutige Lösung $u \in H$ $f \in G$

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,f) = \varphi(v) & \forall v \in H \\ b(u,g) = \psi(g) & \forall g \in G \end{cases}$$

und es gilt $\|u\|_H + \|f\|_G \leq C \left(\|\varphi\|_{H'} + \|\psi\|_{G'} \right)$

Beweis: Seminarvortrag / Braess Finite Elemente

(9.14) Beispiel für die Anwendung von (9.13)

Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit von

$\mu \in \mathbb{R}^+$ $\begin{cases} \operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} u = j \quad \xleftarrow{} \text{Strom} \\ \text{PEC Randbedingung} \quad \text{„0 Randbedingungen"} \end{cases}$ $(*)$

Die zugehörige Bilinearform auf $H^{\operatorname{curl}}(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu^{-1} \operatorname{curl} u \cdot \operatorname{curl} v \, dx$$

ist nicht nicht koerziv, da für $u = \nabla\varphi$

$$a(u,u) = 0 \quad \text{aber} \quad \| u \|^2_{\operatorname{curl},\Omega} = \| u \|^2_{0,\Omega} + \| \underbrace{\operatorname{curl} u}_{=0} \|^2_{0,\Omega} = \| \nabla \varphi \|^2_{0,\Omega} \neq 0$$

Damit die schwache Formulierung von $(*)$

Find $u \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega)$ s.d.

$\rightarrow$ $(**)$ $\quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega) \qquad \left(\ell(v) = \int_\Omega j \cdot v \, dx \right)$

eine Lösung haben kann, muss der Strom j kompatibel sein, d.h.

$\operatorname{div} j = 0$ in Ω und $j \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$, denn für $v = \nabla \varphi$ in $(**)$

ist $\underline{\underline{0}} = \int_\Omega \mu^{-1} \operatorname{curl} u \cdot \underbrace{\operatorname{curl} \nabla \varphi}_{=0} \, dx = \int_\Omega j \cdot \nabla \varphi \, dx$

$$\overset{\text{PI}}{=} \underline{\underline{-\int_\Omega \operatorname{div} j \, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} j \cdot \nu \, \varphi \, dx}}$$

Da eine Lösung nur bis auf die Addition eines Gradientenfeldes gegeben ist, fügen wir die Bedingung $u \perp \nabla H^1(\Omega)$ d.h

$$\int_\Omega u \cdot \nabla g \, dx = 0 \quad \forall g \in H^1(\Omega)$$

hinzu

Wir suchen also $u \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega)$ und $f \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a(u,v) + b(u,f) = \ell(v) & \forall v \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega) \\ b(u,g) = 0 & \forall g \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \end{cases}$$

mit

$$b(u,g) = \int_\Omega u \cdot \nabla g \, dx$$

Für Bedingung i) müssen wir zeigen, dass für $\alpha > 0$

$$\mu^{-1} \| \operatorname{curl} v \|^2_{0,\Omega} \geq \alpha \left(\| v \|^2_{0,\Omega} + \| \operatorname{curl} v \|^2_{0,\Omega} \right)$$

für $v \in H_0 = \left\{ v \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega) : (v, \nabla\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in H^1(\Omega) \right\}$

Dafür verwendet man eine Friedrich Ungleichung für V_0

Für die Bedingung ii) LBB Bedingung

$$\sup_{\substack{u \in H^{curl}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega u \cdot \nabla \varphi \, dx}{\| u \|_{curl,\Omega}} \geq \beta \| \varphi \|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

wählen wir $u = \nabla \varphi$ dann ist

$$\| \nabla \varphi \|_{0,\Omega}^{\cancel{2}} = \int_\Omega \| \nabla \varphi \|_2^2 \, dx \overset{!}{\geq} \beta \underbrace{\| \varphi \|_{1,\Omega}} \underbrace{\| \nabla \varphi \|_{curl,\Omega}}_{= \cancel{\| \nabla \varphi \|}_{0,\Omega}}$$

$$\| \varphi \|_{0,\Omega} \overset{!}{\leq} \| \nabla \varphi \|_{0,\Omega} \quad \text{geht in } H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

□

(9.15) Satz (Fredholm)

Sei $K : H \to H$ $((H, (,)_H)$ Hilbertraum$)$ ein kompakter selbstadjungierter linearer Operator. Dann gibt eine Menge von Eigenwerten λ_i $i = 1 \ldots$ und Eigenvektoren u_i $i = 1 \ldots$

d.h. $K u_i = \lambda_i u_i$ $\quad u_i \neq 0$

mit

i) $u_i \perp u_j$ für $i \neq j$ $\quad (u_i, u_j) = 0$

ii) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq$

iii) der einzige Häufungspunkt der Eigenwerte ist 0

iv) $K u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, u_j) u_j$ wobei diese Reihe in $\| \; \|_H$ konvergiert

v) Für $V = \operatorname{span}\{u_1 \ldots\}$ gilt $H = \bar{V} \oplus \ker(K)$

?

(9.16) Beispiel

Mit Hilfe von (9.15) kann man zeigen, dass für kompaktes K der Operator $I_d - \lambda K$ invertierbar bis auf eine endliche Menge von Werten λ

Wenn u die Lösung von

$$\underbrace{\int_\Omega \mu^{-1} \operatorname{curl} u \operatorname{curl} v \, dx} = \int (j - \kappa u) \cdot v \, dx \quad \forall v \in H^{curl}(\Omega) \text{ mit } \operatorname{div} v = 0$$

ist mit der Nebenbedingung $\operatorname{div} u = 0$, so liefert (9.13) für $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$

dass

$$\boxed{(\Delta)} \begin{cases} \int_\Omega \mu^{-1} \operatorname{curl} u \cdot \operatorname{curl} v \, dx + \int_\Omega v \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx & \forall v \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega) \\ \int_\Omega u \nabla \psi & \forall \psi \in H^1(\Omega)/_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

eine Lösung hat

mit $\| u \|_{\operatorname{curl},\Omega} \leq \| f \|_{0,\Omega}$

Damit ist der Lösungsoperator $T : \left(L^2(\Omega)\right)^3 \to H^{\operatorname{curl}}(\Omega)$ $f \mapsto u$ (Lösung von (Δ))

beschränkt.

Wenn wir zeigen, dass die Einbettung $H^{\operatorname{curl}}(\Omega) \hookrightarrow \left(L^2(\Omega)\right)^3$

kompakt ist so liefert (9.15) die Existenz einer Lösung, solange κ kein

Eigenwert ist.

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

$T + \kappa I$

(9.17) <u>Satz</u> (Ceas Lemma) vgl (6.6)

Sei $S \leq H$ ($(H, (\ ,\ )_H)$ Hilbertraum) ein linearer Unterraum

Ist $a : H \times H \to \mathbb{C}$ koerzive beschränkte Sesquilinearform und $f' \in H$

dann hat das Problem

Finde $u_S \in S$ so dass $a(u_S, v_S) = f'(v_S)$ $\forall v_S \in S$ $(\square)$

eine eindeutige Lösung und es gilt

$$\| u - u_S \|_H \leq C \inf_{v_S \in S} \| u - v_S \|_H$$

Hierbei ist u Lösung von $a(u,v) = f'(v)$ $\forall v \in H$

⌈ In (6.6) hatten wir gezeigt dass $\| u_S - u \|_a = \inf_{v_S \in S} \| v_S - u \|_a$

wobei $\| u \|_a^2 = a(u,u)$ eine Norm war ⌋

(Jetzt ist $a(u,u)$ keine Norm mehr!)

<u>Beweis</u> Da $S \leq H$ ist $a : S \times S \to \mathbb{C}$ ebenfalls eine beschränkte

koerzive Sesquilinearform. Nach (9.9) Lax Milgram hat $(\square)$ also

eine eindeutige Lösung u_S

und es gilt

$$a(u-u_S, v_S) = 0 \qquad \forall\, v_S \in S$$

Dann gilt für $v_S \in S$

$$a(u-u_S, u-u_S) = a(u-u_S, u-v_S) + \underbrace{a(u-u_S, \underbrace{v_S-u_S}_{\in S})}_{=0}$$

$$= a(u-u_S, u-v_S)$$

Aus der Beschränktheit und Koerzivität von a erhalten wir dann

$$\alpha \|u-u_S\|_H^2 \le |a(u-u_S, u-u_S)|$$

$$= |a(u-u_S, u-v_S)| \le M \|u-u_S\|_H \|u-v_S\|_H$$

□

9.18