9) Existenz- und Eindeutigkeitssätze

(9.1) Definition

Ein vollständiger normierter VR H über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

$$(\cdot\,,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{C} \quad \text{und Norm} \quad \|u\|_H = (u,u)_H^{1/2}$$

heißt Hilbertraum

(9.2) Beispiele

$$\left(L^2(\Omega),\ (\ \ )_{0,\Omega} \right)$$

$$\left(H^{curl}(\Omega),\ (\ \ )_{curl,\Omega} \right)$$

$$\left(H^{div}(\Omega),\ (\ \ )_{div,\Omega} \right)$$

ebenso $H_0^{curl}(\Omega)$ $H_0^{div}(\Omega)$ sind Hilberträume

(9.3) Abschätzungen

$(H, (\ ,\ )_H)$ Hilbertraum. Für $u, v \in H$ gilt

$$|(u,v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H \qquad (\text{CSU})$$

Für $\delta > 0$ gilt

$$|(u,v)_H| \leq \frac{\delta}{2} \|u\|_H^2 + \frac{1}{2\delta} \|v\|_H^2$$

Beweis
- CSU bekannt
- folgt aus $0 \leq \left(\sqrt{\delta}\, a + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, b\right)^2 = \delta a^2 + 2ab + \frac{1}{\delta} b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und CSU

(9.4) Bemerkung

Zum Beweis der CSU ist die Definitheit des Skalarprodukts nicht nötig (es reicht die Positivität)

$$(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \quad \forall\ u \in H^1$$

(9.5) Definition Ein Hilbertraum $(H, (\ \ )_H)$ heißt separabel, falls er eine dichte abzählbare Teilmenge enthält

(9.6) Satz (Projektionssatz)

Sei $(H, (\ \ )_H)$ HR und M abgeschlossener linearer Teilraum dann ist $H = M \oplus M^\perp$

mit $M^\perp = \{ u \in H \quad (v,u)_H = 0 \quad \forall v \in M \}$

($H = M \oplus M^\perp$ direkte Summe, d.h.

zu jedem $u \in H$ gibt es genau ein $x \in M$ und $y \in M^\perp$

so dass $u = x + y$)

(9.7) Satz (Rieszscher Darstellungssatz)

Sei $(H, (\ )_H)$ HR. Für $\varphi \in H'$ (φ stetige Linearform)

gibt es genau ein $u \in H$ so dass für alle

$v \in H \qquad \varphi(v) = (u,v)_H$

und $\|u\|_H = \|\varphi\|_{H'}$

(H' wird mit $\|\varphi\|_{H'} := \sup\limits_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \dfrac{\varphi(u)}{\|u\|_H}$ zu einem Hilbertraum)

Beweis FA

(9.8) Definition

Seien $(H, (\ )_H)$ und $(G, (\ ,\ )_G)$ Hilberträume

i) $a : H \times G \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform falls

$a(\alpha u + \beta v, f) = \alpha\, a(u,f) + \beta\, a(v,f)$

$a(u, \alpha f + \beta g) = \bar{\alpha}\, a(u,f) + \bar{\beta}\, a(u,g)$

$\forall\ u, v \in H \quad f, g \in G \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

ii) Eine Sesquilinearform $a : H \times G \to \mathbb{C}$ heißt beschränkt

falls $M^{\in \mathbb{R}}$ existiert so, dass

$|a(u,f)| \leq M \|u\|_H \|f\|_G \quad \forall\ u \in H, f \in G$

iii) Eine Sesquilinearform $a : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt koerziv (coercive)

falls $\alpha > 0$ existiert so dass

$|a(u,u)| \geq \alpha \|u\|_H^2$

(9.9) <u>Satz</u> Lax - Milgram Lemma

Sei $(H, (\ ,\ )_H)$ Hilbertraum. Ist $a : H \times H \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, koerzive Sesquilinearform, so hat das variationelle Problem für $\varphi \in H'$:

Finde $u \in H$ so, dass

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$$

genau eine Lösung und es gilt für diese $\|u\|_H \leq M/\alpha \, \|\varphi\|_{H'}$

mit M und α aus (9.8)

<u>Beweis</u> Seminarvortrag

(9.10) <u>Beispiel für die Anwendung von (9.9)</u>

i) Auf $H_0^1(\Omega)$ ist $\int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx$ koerziv (folgt aus Poincaré Friedrich Ungl.)

damit hat $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \Gamma \end{cases}$

eine Lösung

ii) Auf $H^{curl}(\Omega)$ ist für $k > 0$ die Sesquilinearform

$$\int_\Omega \operatorname{curl} u \cdot \overline{\operatorname{curl} v} + k \, u \bar{v} \, dx$$ koerziv (einfach nachzurechnen)

Damit hat $\operatorname{curl} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} E + k E = f$

für $k > 0$ $(\mu > 0)$ eine Lösung.

Solche Gleichungen treten bei statischen Problem oder nach Zeitdiskretisierung auf

(9.11) <u>Satz</u> Verallgemeinertes Lax - Milgram Lemma

Seien $(H, (\ ,\ )_H)$ und $(G, (\ ,\ )_G)$ Hilberträume

$a : H \times \underline{G} \to \mathbb{C}$ beschränkte Sesquilinearform

mit

i) $\exists \ \alpha > 0$ so dass

$$\inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} \ \sup_{\substack{f \in G \\ \|f\|_G = 1}} |a(u, f)| \geq \alpha$$

d.h. $\exists \alpha > 0$

$$\sup_{\substack{f \in G \\ f \neq 0}} \frac{|a(u,f)|}{\|f\|_G} \geq \alpha \|u\|_H \quad \forall u \in H$$

ii) $\exists \alpha > 0$ so dass

$$\inf_{\substack{f \in G \\ \|f\|_G = 1}} \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} |a(u,f)| \geq \alpha$$

Dann gibt es zu $\varphi \in G'$ genau ein $u \in H$ s.d.

$$a(u,f) = \varphi(f) \quad \forall f \in G$$

und dieses u gilt

$$\|u\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \|\varphi\|_{G'}$$

(9.12) Beispiel

Betrachte zeitharmonische Maxwellgleichungen $\qquad \mu^{-1} \in \mathbb{R}^+$

$$\operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} u + \underbrace{(i\omega\sigma - \omega^2 \varepsilon)}_{=: \kappa = \kappa_r + \kappa_i i} u = j$$

$\kappa_r, \kappa_i \in \mathbb{R}$ mit $\kappa_i \neq 0$

Zerlegt man u und j in Real- und Imaginärteil so erhält man $u = \begin{pmatrix} u_r \\ u_i \end{pmatrix}$

für $u = u_r + i u_i \qquad j = j_r + i j_i$

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} u_r - \kappa_i u_i + \kappa_r u_r = j_r \\ \operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} u_i + \underbrace{\kappa_i u_r + \kappa_r u_i}_{} = j_i \end{cases}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit v_r und die zweite mit v_i

$$v = \begin{pmatrix} v_r \\ v_i \end{pmatrix}$$

integriert über Ω und wendet die Greensche Formel an so erhält man die schwache Formulierung: Finde $u \in (H^{\operatorname{curl}}(\Omega))^2 =: V$

$$\underbrace{\int_\Omega \mu^{-1} \operatorname{curl} u_r \operatorname{curl} v_r + \mu^{-1} \operatorname{curl} u_i \operatorname{curl} v_i + \kappa_r (u_r v_r + u_i v_i) + \kappa_i (-u_i v_r + u_r v_i) \, dx}_{a(u,v)} \text{ " + Randterme "}$$

$$= \underbrace{\int_\Omega j_r \cdot v_r + j_i \cdot v_i \, dx}_{\ell(v)} \qquad \forall\ v = \begin{pmatrix} v_r \\ v_i \end{pmatrix} \in \left(H^{curl}(\Omega)\right)^2$$

i) $a(u,f) \leq M\left(\|u\|_{curl,\Omega} \cdot \|f\|_{curl,\Omega}\right)$ ✓

Sei $f \in V$ wir konstruieren $u \in V$ so dass

$$a(u,f) \geq \alpha \|f\|_V^2 \qquad \left(\geq \alpha \|f\|_V \|u\|_V\right)$$

und $\|u\|_V \leq \|f\|_V$

Sei $u = \begin{pmatrix} f_r \\ f_i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} f_i \\ -f_r \end{pmatrix}$ (wie man β wählt sehen wir gleich)

Dann ist $a(u,f) =$

$$\int_\Omega \mu^{-1} \Big(curl\, f_r\, curl\, f_r + \cancel{\beta\, curl\, f_i\, curl\, f_r} + curl\, f_i\, curl\, f_i - \cancel{\beta\, curl\, f_i\, curl\, f_r} \Big) + (\kappa_r + \beta \kappa_i) f_r f_r + f_i f_i \, dx$$

Für $\beta = \frac{1-\kappa_r}{\kappa_i}$ ist dann

$$a(u,f) = \mu^{-1} \|curl\, f\|_{0,\Omega}^2 + \|f\|_{0,\Omega}^2 \leq \|f\|_V^2$$

$$\|u\| \leq \|f\| (1+\beta)$$

Falls $\kappa_i \neq 0$ existiert Lsg

(9.13) Satz (Brezzi)