(1.3) Maxwell Gleichungen

$$\partial_t B + \text{curl}_x E = 0$$

$$-\partial_t D + \text{curl}_x H = j_{tot}$$

$$\text{div } B = 0$$

$$\text{div } D = \rho$$

Gaußsche Gesetze

curl_x "=" $\begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \partial_{x_2}\\ \partial_{x_3}\end{pmatrix} \times$ Kreuzprodukt! $\qquad$ div "=" $\begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \partial_{x_2}\\ \partial_{x_3}\end{pmatrix} \cdot$

$$B = \mu H \qquad j_{tot} = \sigma E + j$$

$$D = \varepsilon E$$

Bemerkung: i) Die beiden Gaußschen Gesetze kann man als Folgerung aus dem Faradayschen Gesetz interpretieren (falls $\text{div}_x B(0,x) = 0$ so ist $\text{div}_x B(t,x) = 0 \ \forall t$) Warum?

und als Definition von ρ

ii) Wendet man formal die Divergenz auf die zweite Gleichung an, so erhält man mit der vierten

$$-\partial_t \rho = \text{div } j_{tot} \qquad \leftarrow \text{Erhaltungsgleichung}$$

Integration über ein Testvolumen liefert

$$\partial_t \int_V \rho \, dx + \int_V \text{div } j_{tot} \, dx = 0$$

$$\partial_t \int_V \rho \, dx + \int_{\partial V} j \cdot \nu \, ds = 0$$

"Die Ladungsmenge in V ändert sich wie der Fluß des Stromes über die Oberfläche"

$$\partial_t B + \text{curl}_x E = 0$$

$$\underbrace{-\partial_t D} + \text{curl}_x H = j_{tot}$$

$$\text{div } B = 0$$

$$\text{div } D = \rho$$

$$\left.\begin{array}{l} D = \varepsilon E \\ B = \mu H \end{array}\right\} \text{lineare Materialgesetze}$$

(1.4) Vereinfachte Maxwellgleichungen

1. Wirbelstrommodel (Eddy current model)

Manchmal $\varepsilon \cdot \partial_t E$ vernachlässigbar klein ist so erhält man

$$\partial_t B + \text{curl } E = 0$$

$$\text{curl } H = j_{tot} = \sigma E + j$$

Verwendet man $B = \mu H$ so ergibt sich

$$\partial_t \mu H + \text{curl } \tfrac{1}{\sigma} \text{curl } H - \text{curl } \tfrac{1}{\sigma} j = 0$$

2. Zeitharmonische Maxwellgleichungen

Nimmt man an, dass $j = \text{Re}\left(\hat{j}_a(x) \cdot e^{i\omega t}\right)$ für eine komplexwertige

Realteil

Funktion $\hat{j}_a(x)$ und eine Frequenz ω (i : imaginäre Einheit)
dass alle Materialgesetze linear sind, so erhält man

$$\partial_t \underline{B} + \mathrm{curl}_x \underline{E} = 0$$
$$-\partial_t \underline{D} + \mathrm{curl}_x \underline{H} = j^{tot}$$
$$\mathrm{div}\, \underline{B} = 0 \leftarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{div}\, \underline{D} = \underline{\rho}$$

$$i\omega \hat{b} + \mathrm{curl}\, \hat{e} = 0$$
$$-i\omega \hat{d} + \mathrm{curl}\, \hat{h} = \hat{j}_a + \sigma \hat{e}$$
$$\hat{d} = \varepsilon \hat{e}$$
$$\hat{b} = \mu \hat{h}$$

für
$$E(x,t) = \mathrm{Re}\left(\hat{e}(x) \cdot e^{i\omega t}\right)$$
$$B(x,t) = \mathrm{Re}\left(\hat{b}(x) e^{i\omega t}\right)$$
$$H(x,t) = \mathrm{Re}\left(\hat{h}(x) e^{i\omega t}\right)$$
$$D(x,t) = \mathrm{Re}\left(\hat{d}(x) e^{i\omega t}\right)$$

Ersetzt man ε durch $\varepsilon + \sigma / i\omega$ so ergibt sich

$$\left[\begin{array}{ll} -i\omega \hat{d} + \mathrm{curl}\, \hat{h} = \hat{j}_a & \hat{d} = \varepsilon \hat{e} \\ i\omega \hat{b} + \mathrm{curl}\, \hat{e} = 0 & \hat{b} = \mu \hat{h} \end{array}\right]$$

(1.5) Anfangs-, Rand- und Interfacebedingungen

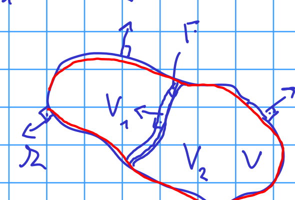
$$\partial_t \underline{B} + \mathrm{curl}_x \underline{E} = 0$$
$$-\partial_t \underline{D} + \mathrm{curl}_x \underline{H} = j^{tot}$$
$$\mathrm{div}\, \underline{B} = 0$$
$$\mathrm{div}\, \underline{D} = \underline{\rho}$$

- Damit das System der Maxwellgleichungen eindeutig lösbar ist brauchen wir Anfangswerte

$$B(x,0) = B_0(x)$$
$$D(x,0) = D_0(x)$$

Wir fordern $\mathrm{div}\, B_0 = 0$ (damit ist $\mathrm{div}_x B = 0$ für alle $t > 0$)

- Wir betrachten eine Zerlegung von $V \subseteq \Omega$ in zwei Teilgebiete V_1 und V_2 derart dass $\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2 = \overline{V}$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt



Das Interface ist $\Gamma := \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$

Mit ν_Γ wird der Normalenvektor auf Γ von V_2 nach V_1

Sind die Vektorfelder und die Flächen und Teilgebiete glatt genug, so dass der Satz von Gauß und der Satz von Stokes anwendbar sind so folgt aus

$$\int_{\partial V} B \cdot \nu \, ds = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\int_{\partial V} B \cdot \nu \, ds + \int_{\partial V_1} B \cdot \nu \, ds + \int_{\partial V_2} B \cdot \nu \, ds$$

$$= -\int_{\partial V_1 \cap \Gamma} B_1 \cdot \nu_\Gamma \, ds + \int_{\partial V_2 \cap \Gamma} B_2 \cdot \nu_\Gamma \, ds = \int_\Gamma [B \cdot \nu_\Gamma] \, ds$$

für $B_1 := B|_{V_1}$ $B_2 := B|_{V_2}$ und den Sprung $[B \cdot \nu_\Gamma] := (B_2 - B_1) \cdot \nu_\Gamma$

entlang des Interfaces Γ. Da V beliebig war, muss

$$[B \cdot \nu_\Gamma] = 0 \quad \text{sein}$$

Ladungsdichte

Die Normalenkomponente von B ist stetig

Ähnlich erhalten wir für den Verschiebungsstrom D unter Berücksichtigung

der Oberflächenladung ρ_s

$$\left(\int_V \rho \, dx = \int_{V_1} \rho \, dx + \int_{V_2} \rho \, dx + \int_\Gamma \underline{\rho_s} \, ds \right)$$

aus

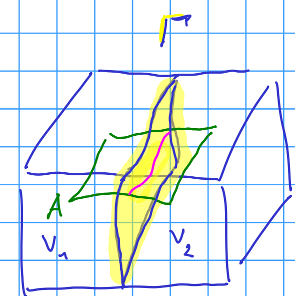
$$\int_{\partial V} D \cdot \nu = \rho$$

$$[D \cdot \nu_\Gamma]_\Gamma = \rho_s$$

Zur Herleitung von Interfacebedingungen für das elektrische Feld

sei A eine 2 dimensionale Fläche die Γ schneidet

so dass Kurve $L = A \cap \Gamma$ entsteht



$A_1 := A \cap V_1$ $\quad \overline{A} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$

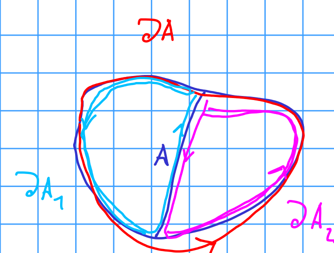
$A_2 := A \cap V_2$ $\quad L = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$

Aus dem Faradayschen Gesetz

$$\int_S \partial/\partial t \, B \cdot \nu \, ds = - \int_{\partial S} E \cdot \tau \, ds$$

↑ 2D Fläche ↑ geschlossene Kurve

Folgt



$$0 = - \int_{\partial A} E \cdot \tau \, ds + \int_{\partial A_1} E_1 \cdot \tau_1 \, ds + \int_{\partial A_2} E_2 \cdot \tau_2 \, ds$$

$$= \int_{\partial A_1 \cap L} E_1 \cdot \tau_1 \, ds + \int_{\partial A_2 \cap L} E_2 \cdot \tau_2 \, ds$$

$$= \int_L [E \cdot \tau_L] \, ds$$

für $E_1 = E|_{A_1}$ und $E_2 = E|_{A_2}$ für $\tau_L = \tau_1 = -\tau_2$

Da L beliebig ist $[E \cdot \tau_L] = 0$

Die Tangentialkomponente von E ist stetig

Wdh Analysis

[O. Forster Analysis 3 § 18 - § 21]