(8.29) Lemma

Sei $q \in H^{div}(\Omega)$ mit $\gamma_{n,\partial\Omega}\, q = 0$ und $\operatorname{div} q = 0$

Dann existiert ψ so, dass

$$q = \operatorname{curl} \psi .$$

Dieses ψ kann auf drei Arten gewählt werden

1) $\psi \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$ $\quad \operatorname{div} \psi = 0$ und $|\psi|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}$

$\uparrow$ H^1 Seminorm $\left(\int_\Omega \|\nabla \psi\|_2 \, dx\right)^{1/2}$

oder

2) $\psi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ und $\|\psi\|_{1,\Omega} \leq c\, \|q\|_{0,\Omega}$

oder

3) $\psi \in H_0^{curl}(\Omega)$ $\quad \operatorname{div} \psi = 0$ $\quad \|\psi\|_{curl,\Omega} \overset{c?}{\leq} \|q\|_{0,\Omega}$

$\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

Beweisskizze: 1) ψ_1 aus Fouriertransformierten einer Fortsetzung

2) ψ_1 modifiziert so dass ψ_2 Eigenschaften 2) erfüllt

3) Um eine Lösung ψ_3 zu konstruieren, die $\operatorname{div} \psi_3 = 0$ wie in 3) gefordert, erfüllt projezieren wir ψ_2 (zur Erinnerung $\gamma_\Gamma \psi_2 = 0$!)

Sei $\phi \in H_0^1(\Omega)$ Lösung von

$$(\nabla \phi, \nabla v)_{0,\Omega} = (\psi_2, \nabla v) \quad \forall v \in H_0^1$$

Dann erfüllt $\psi_3 := \psi_2 - \nabla \phi$ $\quad \operatorname{div} \psi_3 = 0$, da

$$(\psi_3, \nabla v) = (\psi_2 - \nabla \phi, \nabla v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Weiter ist $\gamma_{\tau,\Gamma}\, \psi_3 \overset{?}{=} 0$ $\leftarrow$ Hier fehlte in der Vorlesung am Mittwoch noch ein Zwischenschritt

$\psi_3 \in H^{curl}(\Omega)$

(8.30) Lemma

Sei Ω Lipschitzgebiet, $q \in H^{div}(\Omega)$ und $\operatorname{div} q = 0$ in Ω

Dann existiert ψ so, dass $q = \operatorname{curl} \psi$

Dieses ψ kann so gewählt werden, dass

1) $\psi \in (H^1(\Omega))^3$ $\quad \operatorname{div} \psi = 0$ $\quad$ und $\quad |\psi|_{1,\Omega} \lesssim \|q\|_{0,\Omega}$

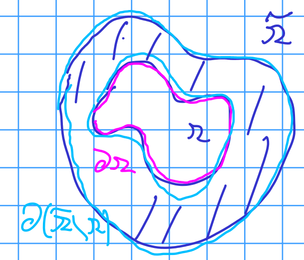
oder

2) $\psi \in H^{curl}(\Omega)$ $\quad \operatorname{div} \psi = 0$ $\quad$ und $\quad \gamma_{n,\partial\Omega} \psi = 0$ $\quad$ und

$$\|\psi\|_{curl,\Omega} \lesssim \|q\|_{0,\Omega}$$

Beweis: Idee wende (8.29) auf ein vergrößertes Gebiet $\tilde{\Omega}$ an

Sei $\tilde{\Omega}$ ein Gebiet, das Ω enthält



Sei $\tilde{q} \in H_0^{div}(\tilde{\Omega})$ so dass

$$(*)\begin{cases} \gamma_{n,\partial\Omega}\tilde{q} = \gamma_{n,\partial\Omega} q \\ \gamma_{n,\partial\tilde{\Omega}}\tilde{q} = 0 \end{cases} \qquad q = \tilde{q}|_{\Omega}$$

Da $\operatorname{div} q = 0$ in Ω ist $\quad \int_{\partial\Omega} q \cdot \nu \, d\sigma(x) = 0$

und $\quad \int_{\partial(\tilde{\Omega}\setminus\Omega)} \tilde{q} \cdot \nu \, d\sigma(x) = 0$

Nach dem inversen Spursatz gibt es $\tilde{q} \in H^{div}(\tilde{\Omega}\setminus\Omega)$

mit $\operatorname{div}\tilde{q} = 0$ und den Randbedingungen $(*)$

Wir setzen dieses $\tilde{q}$ mit Null auf $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{\Omega}$ fort $\quad (\gamma_{n,\partial\tilde{\Omega}}\tilde{q} = 0)$

Dann folgt die Konstruktion von ψ das 1) erfüllt wie im Beweis von (8.29)

$q = \operatorname{curl} \psi$

Zur Konstruktion einer Funktion ψ_2 die 2) erfüllt projizieren wir

wieder $\qquad$ hier fehlt noch eine Annahme

Sei $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ so dass

$$(\nabla\phi, \nabla v)_{0,\Omega} = (\psi, \nabla v)_{0,\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

Dann gilt für $\psi_2 := \psi - \nabla\phi$ $\qquad \psi_2 \in H^{curl}(\Omega)$

$(\psi_2, \nabla v)_{0,\Omega} = 0 \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \rightsquigarrow \operatorname{div}\psi_2 = 0$

und $\quad \gamma_{n,\Gamma}\psi_2 = \gamma_{n,\Gamma}(\psi - \nabla\phi) = 0$ $\qquad$ und hier noch ein Zwischenschritt!

?

(8.31) **Satz** Helmholtzzerlegung

Sei $q \in (L^2(\Omega))^3$. Dann gibt es eine Zerlegung

$$q = \nabla \phi + \operatorname{curl} \psi$$

wobei ϕ und ψ wie folgt gewählt werden können

1) $\phi \in H^1(\Omega)$ $\quad \psi \in (H^1(\Omega))^3$ mit $\operatorname{div} \psi = 0$

und $\|\phi\|_{1,\Omega} \leq c \|q\|_{0,\Omega}$ $\quad |\psi|_{1,\Omega} \leq c \|q\|_{0,\Omega}$

oder

2) $\phi \in H^1(\Omega)$ $\quad \psi \in H_0^{\operatorname{curl}}(\Omega)$ und $\operatorname{div} \psi = 0$ $\quad \boxed{\|\phi\|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}}$

$\|\psi\|_{\operatorname{curl},\Omega} \leq c \|q\|$

oder

3) $\phi \in H^1(\Omega)$ $\quad \psi \in (H_0^1(\Omega))^3$ $\quad \boxed{\|\phi\|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}}$ $\quad \|\psi\|_{1,\Omega} \leq c \|q\|_{0,\Omega}$

oder

4) $\phi \in H_0^1(\Omega)$ $\quad \psi \in (H^1(\Omega))^3$ und $\operatorname{div} \psi = 0$ $\quad \boxed{\|\phi\|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}}$

$|\psi|_{1,\Omega} \leq c \|q\|_{0,\Omega}$

oder

5) $\phi \in H_0^1(\Omega)$ $\quad \psi \in H^{\operatorname{curl}}(\Omega)$ $\quad \operatorname{div} \psi = 0$ $\quad \gamma_{n,\Gamma} \psi = 0$

$\boxed{\|\phi\|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}}$

$\|\psi\|_{\operatorname{curl},\Omega} \leq c \|q\|_{0,\Omega}$

Beweis Sei ϕ die Lösung von

$$(\nabla \phi, \nabla v)_{0,\Omega} = (q, \nabla v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad \text{in } H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

(Poisson Neumannproblem mit homogenen Randbedingungen)

$\boxed{\int_\Omega \phi = 0}$

Dann ist $q - \nabla \phi$ divergenzfrei $\quad ((q - \nabla \phi, \nabla v) = 0)$

$\Downarrow$

$\int_\Omega \nu \cdot q = 0$

$\boxed{\|\phi\|_{0,\Omega} \leq c}$ und erfüllt $\boxed{\gamma_{n,\Gamma}(q - \nabla \phi) = 0}$

Nach Lemma (8.29) existiert ψ so dass

$|\nabla \phi|_{0,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}$

$$q - \nabla \phi = \operatorname{curl} \psi$$

und damit erhält man die gewünschte Zerlegung in den Fällen 1,2,3

Sei nun ϕ die Lösung von

$$(\nabla \phi, \nabla v) = (q, \nabla v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \leftarrow \quad |\nabla \phi|_{0,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}$$

in $H_0^1(\Omega)$ (Poissonproblem mit homogenen Dirichletrandbedingungen) dann ist wieder $\operatorname{div}(q - \nabla\phi) = 0$ und nach Lemma (8.35)

existiert ψ so, dass $\|\phi\|_{1,\Omega} \leq \|q\|_{0,\Omega}$

$$q - \nabla\phi = \operatorname{curl}(\psi)$$

das die gewünschten Eigenschaften hat.