(8.17) Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend, Lipschitzberandet, offen, beschränkt,

Dann gilt

$$\{ u \in H^{curl}(\Omega) : curl\, u = 0 \} = \ker curl \text{ in } H^{curl}(\Omega)$$

$$= \operatorname{Im}(grad) = grad\left(H^{grad}(\Omega)\right) = \nabla \underline{\underline{H^1}}(\Omega)$$

Beweis "$\supseteq$" Da für glatte Funktionen f $curl\, grad\, f = 0$ ist mit einem Dichtheitsargument klar dass falls für $p \in H^1(\Omega)$ $u := \nabla p$ gilt $curl\, u = 0$

"$\subseteq$" Sei $u \in H^{curl}(\Omega)$ mit $curl\, u = 0$

Dann gibt es Folge glatter Funktionen $u^\varepsilon := S_c^\varepsilon u$ für die $curl\, u^\varepsilon = S_d^\varepsilon\, curl\, u = 0$ also der curl verschwindet

Glatte Funktionen deren curl verschwindet sind Gradienten glatter Funktionen. Also gibt es w^ε derart dass

$$grad\, w^\varepsilon = u^\varepsilon$$

w^ε ist bis auf Konstante eindeutig. Sei jetzt w^ε so, dass

$$\int_\Omega w^\varepsilon = 0$$

Da $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ ist Cauchyfolge in L^2 ist $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ Cauchyfolge in $H^{grad}(\Omega)$ die gegen w konvergiert mit $\nabla w = u$

$\square$

(8.18) Der Spuroperator

Im Folgenden Ω Lipschitzberandet

Ziel Auswerten von Funktionen in $H^1(\Omega)$, $H^{div}(\Omega)$, $H^{curl}(\Omega)$ auf dem Rand $\partial\Omega =: \Gamma$

Für $w \in C(\overline{\Omega}) \cap \underline{\underline{H^1(\Omega)}}$ sei $\gamma_\Gamma w = w|_\Gamma$ die Einschränkung von w auf Γ

Definiere

$$\| w \|^2_{1/2,\Gamma} := \underbrace{\| w \|^2_{0,\Gamma}}_{= \int_\Gamma \| w(x) \|^2_{\ell^2} \, d\sigma(x)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\| w(x) - w(y) \|^2_{\ell^2}}{\| x - y \|^2_{\ell^2}} \, d\sigma(x) \, d\sigma(y)$$

$$\| w \|^2_{1,\Omega} = \int \| w \|^2 \, dx + \int \| \nabla w \|^2 \, dx$$

Norm für Funktion $w : \Gamma \to \mathbb{R}^d$

Man kann zeigen, dass für $w \in C(\bar\Omega) \cap H^1(\Omega)$

$$\| \gamma_\Gamma w \|_{1/2,\Gamma} \leq c \, \| w \|_{1,\Omega} \quad \text{für eine Konstante } c$$

Norm PDE $\| \quad \|_{0,\Gamma}$

Dann wird

$$H^{1/2}(\Gamma) = \overline{C^\infty(\Gamma)}^{\| \ \|_{1/2,\Gamma}}$$ Vervollständigung bzgl der $\| \ \|_{1/2,\Gamma}$ Norm

Inverser Spursatz

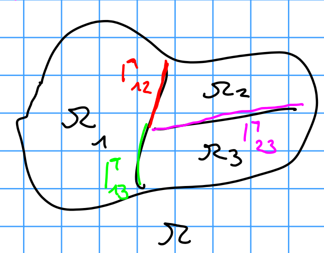
Weiter kann man zeigen, dass es zu $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ ein $u \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_\Gamma u = w$ und $\| u \|_{1,\Omega} \leq c \, \| w \|_{1/2,\Gamma}$ für eine Konstante c

(8.20) Lemma

Sei $u \in L^2(\Omega)$, Ω Lipschitzberandet, $\{\Omega_i : i = 1..n\}$ Zerlegung von Ω in Lipschitzberandete Gebiete und $\Gamma_{ij} = \bar\Omega_i \cap \bar\Omega_j$.

(d.h. $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$\bar\Omega = \bigcup_{i=1}^n \bar\Omega_i$)



Weiter sei $u_i = u|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i) = H^{grad}(\Omega_i)$

und $\gamma_{\Gamma_{ij}} u_i \overset{\text{in } H^{1/2}(\Gamma)}{=} \gamma_{\Gamma_{ij}} u_j$ für $i,j = 1..n$

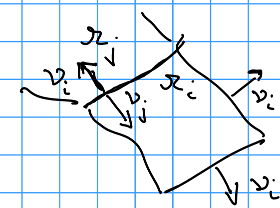
so ist $u \in H^1(\Omega)$

Beweis Sei $g_i := \nabla u_i$ lokale schwache Gradienten auf Ω_i

Wir definieren $g \in L^2(\Omega)$ durch

$$g|_{\Omega_i} = g_i \quad \text{auf } \Omega_i$$

Für $\varphi \in (C^\infty_0(\bar\Omega))^d$ ist



$$-\int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\varphi\,dx = -\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} u_i \,\mathrm{div}\,\varphi\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \nabla u_i\cdot\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega_i}\gamma_{\partial\Omega_i} u\; \underline{\varphi\cdot\nu_i} \, d\sigma(x)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} g_i\cdot\varphi\,dx - \sum_{i,j=1}^n \Big(\int_{\Gamma_{ij}} \underbrace{\left(\gamma_{\Gamma_{ij}} u_i - \gamma_{\Gamma_{ij}} u_j\right)}_{=0} \varphi\cdot\nu_i\,d\sigma(x)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} g_i\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega g\cdot\varphi\,dx$$

Also ist g der schwache Gradient von u und damit ist $u\in H^1(\Omega)$ $\square$

(8.21) Definition

Mit $H^{-1/2}(\Gamma)$ bezeichnen wir den (topologische) Dualraum von $H^{1/2}(\Gamma)$

Für $u\in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\psi\in H^{-1/2}(\Gamma)$ ist

$$\langle \psi, u\rangle = \int_\Gamma \psi\cdot u\,d\sigma(x)$$

(8.19) Satz

Für $u\in H^1(\Omega)$ gilt folgende partielle Integration

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\varphi\,dx + \int_\Omega u\,\mathrm{div}\,\varphi\,dx = \int_{\partial\Omega}\gamma_\Gamma(u)\,\varphi\cdot\nu\,d\sigma(x) \quad \forall\,\varphi\in C^\infty(\bar\Omega)^d$$

(8.22) Satz (Spursatz für $H^{div}(\Omega)$)

Ω Lipschitz berandet

Es gibt genau einen stetigen linearen Operator

$$\gamma_{n,\Gamma} \quad H^{div}(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma) \qquad (\Gamma = \partial\Omega)$$

mit

$$\gamma_{n,\Gamma}\, u(x) = \underbrace{u(x)\cdot\nu(x)}_{} \qquad \text{für } u \in C^\infty(\Omega)^d$$

$\mathbb{R}^d$ Skalarprodukt

Normalenkomponente des Vektorfelds am Rand

Beweis

Für $u \in (C^\infty(\bar\Omega))^d$ und $w \in H^1(\Omega)$ ist nach (8.19)

$$\int_\Omega \nabla w \cdot u \, dx + \int_\Omega w \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_\Gamma w \, \underbrace{u\cdot\nu}_{=\mu} \, d\sigma(x)$$

$$\Rightarrow \Big| \int_{\partial\Omega} \underbrace{\gamma_\Gamma w}_{\in H^{1/2}(\Gamma)} \, \overbrace{\underbrace{u\cdot\nu}_{=\mu}}^{\in H^{-1/2}(\Gamma)} \, d\sigma(x) \Big| \le C \, \|u\|_{div,\Omega} \cdot \|w\|_{1,\Omega} \leftarrow$$

Da $\gamma_\Gamma \quad H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ stetig und surjektiv (das sollte man noch zeigen!)

gilt für $\displaystyle \|\gamma_\Gamma(\mu)\|_{-1/2,\Gamma} := \sup_{\substack{w\in H^{1/2}(\Gamma)\\ w\neq 0}} \frac{|\int_\Gamma \gamma_\Gamma(\mu)\, w \, d\sigma(x)|}{\|w\|_{1/2,\Gamma}}$

$\ulcorner$

$x \in H \qquad \ell \in H' \qquad H' = \{\ell : H \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$(H, \|\ \|_H) \qquad (H', \|\ \|_{H'})$

$$\|\ell\|_{H'} = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in H}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|_H}$$

Norm auf H'

$\lrcorner$

$$\|\gamma_\Gamma(\mu)\|_{-1/2,\Gamma} \le \boxed{c} \sup_{\substack{w\in H^1(\Omega)\\ w\neq 0}} \frac{|\int_\Gamma \gamma_\Gamma(\mu)\cdot\gamma_\Gamma(w)\, d\sigma(x)|}{\|w\|_{1,\Omega}}$$

(mit dem inversen Spursatz: zu $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ gibt es $w \in H^1(\Omega)$

mit $u = \gamma_\Gamma(w)$ und $\|w\|_{1,\Omega} \le \boxed{c}\, \|u\|_{1/2,\Gamma}$

$\frac{1}{\|u\|_{1/2,\Gamma}} \leq c \frac{1}{\|w\|_{1,\Omega}}$)

Für $\mu = u \cdot \nu$ ist dann

$$\| \underbrace{\gamma_\Gamma (u \cdot \nu)}_{\gamma_{n,\Gamma} u} \|_{-1/2,\partial\Omega} \leq c \, \| u \|_{div,\Omega}$$

□

(8.23) <u>Satz</u> (Inverser Spursatz)

Zu $q_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ gibt es $q \in H^{div}(\Omega)$ mit

$$\gamma_{n,\Gamma} q = q_n \quad \text{und} \quad \| q \|_{div,\Omega} \leq c \, \| q_n \|_{-1/2,\partial\Omega}$$

Gilt zusätzlich $\int_\Gamma q_n \cdot 1 = 0$ so gibt es $q \in H^{div}(\Omega)$

mit $\gamma_{n,\Gamma} q = q_n$ und $\operatorname{div} q = 0$

<u>Beweis</u>