8. Funktionenräume

$H^{grad}(\Omega) = \boxed{H^1_0(\Omega)}$, $\|u\|_{1,\Omega} = \|u\|_{0,\Omega} + \|\nabla u\|_{0,\Omega}$ $\qquad \nabla : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$H^{div}(\Omega) \qquad \|u\|_{div,\Omega} = \|u\|_{0,\Omega} + \|div\, u\|_{0,\Omega}$

L^2-Norm

$= H(div, \Omega)$

$\cap$

$(L^2(\Omega))^3$, $\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^d (u_i)^2 \, dx \right)^{1/2}$

$H^{curl}(\Omega) \qquad \|u\|_{curl,\Omega} = \|u\|_{0,\Omega} + \|curl\, u\|_{0,\Omega}$

vektorwertig

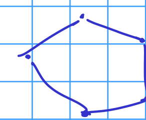
Maxwell

$$\boxed{curl\ curl\ E + \omega^2 E = f}$$

$$\begin{cases} curl\ E = \partial_t B \\ curl\ H = \partial_t D \end{cases}$$

$d^2 E + \omega^2 E = f$

$\Delta E + \omega^2 E = f$

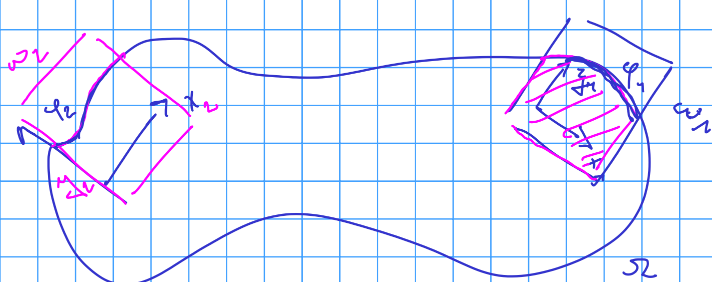


(8.7) Definition

Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ (offen zsh) heißt Lipschitzberandet falls eine endliche Menge von Gebieten $\omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ $i = 1..n$ und lokalen Koordinatensystemen $(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ und Lipschitzstetige Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ existieren so dass

$$\bigcup_{i=1}^n \omega_i \supseteq \partial\Omega$$

und $\qquad \Omega \cap \omega_i = \{ (x, y) \in \underline{\omega_i} : y < \varphi_i(x) \}$



(8.8) Satz $\quad$ Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ Lipschitzberandet, so liegt für $m \in \mathbb{N}_0$

$C^m(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$

Beweis $\quad$ Analysis 3 $\rightsquigarrow$ später

(8.9) Lemma (Shrinking Lemma)

Ist $\Omega \in \mathbb{R}^d$ Lipschitzberandet so gibt es eine Familie glatter Abbildungen

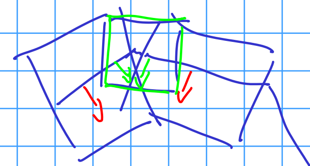
$\Phi^\varepsilon \ \Omega \to \Omega \quad (\Phi^\varepsilon \in C^m)$ mit $\quad dist(\Phi^\varepsilon(\Omega), \partial\Omega) > \varepsilon$

Beweis (nur für Polygone)

$\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ Sei ψ_i eine $|$glatte$|$ Zerlegung der Eins auf dem Rand von Ω — Existenz von ψ_i muss bewiesen werden

d.h. $0 \le \psi_i(x) \le 1$ $\quad \operatorname{supp} \psi_i \subseteq \omega_i$ und $i = 1..n$

für $x \in \partial\Omega$ $\quad \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) = 1$

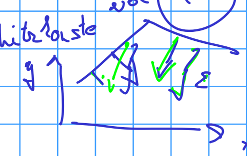


Sei ν_i ein innerer Normalenvektor zu $\partial\Omega$

auf ω_i dann ist für ε klein genug

$$\phi^\varepsilon(x) = x + \varepsilon/L \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\, \nu_i \in C^m$$

für L Lipschitzkonstante von φ_i



eine Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft

(8.10) **Definition**

Für $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^d \;\; \|x - y\|_2 < r \}$ sei

$\psi \in C_0^m(B_1(0))$ mit $\int_{B_1(0)} \psi = 1$

(falls nötig wird ψ durch 0 auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt)

Für $w \in L^2(\Omega)$ wird durch S_g^ε mit

$$S_g^\varepsilon w(x) = \int_{B_1(0)} \psi(y)\, w(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y)\, dy$$

ein Glättungsoperator definiert

(8.11) **Satz**

$$S_g^\varepsilon : L^2(\Omega) \to C^m(\bar{\Omega})$$

($\psi \in C^m$ $\quad \phi^\varepsilon$ hat m schwache Ableitungen

Beweis 1) Für $w \in L^2(\Omega)$ ist $S^\varepsilon w$ stetig

$$S_g^\varepsilon w(x) = \int_{B_1(0)} \psi(y)\, w(\underbrace{\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y}_{=\xi})\, dy \qquad y = \frac{\xi - \phi^\varepsilon(x)}{\varepsilon}$$

$$= \int_\Omega \psi\left(\frac{\xi - \phi^\varepsilon(x)}{\varepsilon}\right) w(\xi)\, d\xi / \varepsilon^d$$

Damit gilt

$$S_g^\varepsilon w(x_1) - S_g^\varepsilon w(x_2) = 1/\varepsilon^d \int_\Omega \left(\psi\left(\frac{\xi - \phi^\varepsilon(x_1)}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{\xi - \phi^\varepsilon(x_2)}{\varepsilon}\right)\right) w(\xi)\, d\xi$$

$$\le \varepsilon^{-d} \|w\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\left(\int_\Omega \left(\psi\left(\frac{\xi - \phi^\varepsilon(x_1)}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{\xi - \phi^\varepsilon(x_2)}{\varepsilon}\right)\right)^2 d\xi \right)^{1/2}}_{\to 0}$$

für $x_1 \to x_2$ da ψ und ϕ^ε stetig sind

Analog folgt die Stetigkeit der partiellen Ableitungen wenn man nachrechnet, dass

$$\partial/\partial x_i \; S_g^\varepsilon w(x) = \int_\Omega -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \psi\Big(\underbrace{\frac{\xi - \phi^\varepsilon(x)}{\varepsilon}}_{y}\Big) \partial/\partial x_i \, \phi^\varepsilon(x) \, w(\xi) \, d\xi/\varepsilon^d$$

$$= \int_{B_1(0)} \underbrace{-1/\varepsilon \; \nabla \psi(y) \, \partial/\partial x_i \, \phi^\varepsilon(x)}_{\text{neue Glättungsfunktion}} \, w(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y) \, dy$$

ψ m mal stetig diffbar

(8.12) <u>Lemma</u>

$$\underbrace{S_g^\varepsilon w}_{\in C^m} \to w \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

<u>Beweis</u>: 1) $S_g^\varepsilon \; L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist stetig

$$\underline{\underline{\| S_g^\varepsilon w \|^2_{L^2(\Omega)}}} = \int_\Omega \Big(\underbrace{\int_{B_1(0)} \psi(y) \, w(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y) \, dy}\Big)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \|\psi\|^2_{L^2(B)} \int_B w(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y)^2 \, dy \, dx$$

$$\leq \|\psi\|^2_{L^2(B)} \int_B \int_\Omega w(\underbrace{\phi^\varepsilon(x)}_{\hat{x}} + \varepsilon y)^2 \, dx \, dy$$

Jacobimatrix, Determinante

$$= \|\psi\|^2_{L^2(B)} \int_B \int_{\phi^\varepsilon(\Omega)} w(\hat{x} + \varepsilon y)^2 \, \left| \left((\phi^{\varepsilon})'\right)^{-1}(\hat{x}) \right| \, d\hat{x} \, dy$$

$$\leq \|\psi\|^2_{L^2(B)} \max \left\{ |\phi^{\varepsilon\prime}|^{-1} \right\} \int_B \int_\Omega w(\hat{x})^2 \, d\hat{x} \, dy$$

$$= \|\psi\|^2_{L^2(B)} \max \left\{ |\phi^{\varepsilon\prime}|^{-1} \right\} \underbrace{|B|}_{\text{Volumen von } B} \|w\|^2_{L^2(\Omega)}$$

2) Sei w Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L

Dann ist

$$S_g^\varepsilon w(x) - w(x) = \int_{B_1(0)} \psi(y) \Big(w(\underbrace{\phi^\varepsilon(x)}_{\approx x + \varepsilon C} + \varepsilon y) - w(x) \Big) dy$$

$$\leq (1 + C) L \varepsilon$$

Da Lipschitzstetige Funktionen dicht in L^2 sind folgt damit die Behauptung $\square$

(8.13) <u>Definition</u>

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ werden zusätzliche Glättungsoperatoren wie folgt definiert

$$S_c^\varepsilon u : (L^2(\Omega))^3 \to (C^m(\bar{\Omega}))^3$$

$$S_c^\varepsilon u = \int_{B_1(0)} \psi(y) \, \phi^{\varepsilon\prime}(x)^T \, u(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y) \, dy$$

$$S_d^\varepsilon q : (L^2(\Omega))^3 \to (C^\infty(\bar{\Omega}))^3$$

$$S_d^\varepsilon q(x) = \int_{B_1(0)} \psi(y)\, |\phi^{\varepsilon'}(x)|\, \phi^{\varepsilon'}(x)^{-1}\, q(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y)\, dy$$

$$S_i^\varepsilon s \quad L^2(\Omega) \to C^\infty(\bar{\Omega})$$

$$S_i^\varepsilon s(x) := \int_{B_1(0)} \psi(y)\, |\phi^{\varepsilon'}(x)|\, s(\phi^\varepsilon(x) + \varepsilon y)\, dy$$

Bemerkung: Wie in (8.12) konvergieren die geglätteten Funktionen gegen die Originalfunktionen

(8.14) Satz

Die Glättungsoperatoren kommutieren im folgenden Sinn

i) Für $w \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\nabla(S_g^\varepsilon w) = S_c^\varepsilon \nabla w$$

ii) Für $u \in H^{curl}(\Omega)$ gilt

$$\operatorname{curl}(S_c^\varepsilon u) = S_d^\varepsilon(\operatorname{curl} u)$$

iii) Für $q \in H^{div}(\Omega)$ gilt

$$\operatorname{div}(S_d^\varepsilon q) = S_i^\varepsilon(\operatorname{div} q)$$

Beweis: folgt für glatte Funktionen aus (8.6)

$\boxed{\text{ÜA}}$ für schwach differenzierbare Funktionen □

(8.16) Korollar

Der Raum $(C^\infty(\bar{\Omega}))^3$ ist dicht in $H^{curl}(\Omega)$ und $H^{div}(\Omega)$

Beweis: Sei $u \in H^{curl}(\Omega)$. Für $n \to \infty$ ist $S_c^{1/n} u$ eine Folge glatter Funktionen so dass $S_c^{1/n} u \to u$ in L^2 für $n \to \infty$

und $\operatorname{curl} S_c^{1/n} u = S_d^{1/n} \operatorname{curl} u \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{curl} u$ in L^2

Also konvergiert $S_c^{1/n} u \to u$ in $H^{curl}(\Omega)$

Das gleiche Argument gilt für $H^{div}(\Omega)$ wenn man $S_c^{1/n}$ durch $S_d^{1/n}$ und $S_d^{1/n}$ durch $S_i^{1/n}$ ersetzt □

ker (curl) = bild (grad)