8 Funktionenräume

(8.1) Definition

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ($n = 1, 2, \underline{3}$, esh). Mit $C_c^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die unendlich oft diffbaren Fktn mit kompaktem Träger

Die lokal integrierbare Funktionen werden mit $L^1_{loc}(\Omega) : \{ f : \Omega \to \mathbb{C}^m$

f meßbar auf Ω $\quad f \in L^1(K) \quad \forall \; K \subseteq \mathring{\Omega}$ kompakt $\}$

$\mathring{\Omega}$ Innere von Ω

$$L^1(K) := \left\{ f \text{ meßbar} \quad \int_K \|f\|_2 \, dx < \infty \right\} / \mathcal{N}$$

$$\mathcal{N} = \left\{ f \text{ meßbar} \quad \int_K \|f\|_2 \, dx = 0 \right\}$$

(8.2) Definition

Eine Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ hat eine schwache Ableitung $D^\alpha f$ für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1 .. \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ falls eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ existiert so, dass

$$\int_\Omega g \cdot \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \varphi \, dx \qquad \forall \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

In diesem Fall setzen wir $D^\alpha f = g \qquad \left(|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i \right)$

(8.3) Satz

Ist $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ($|\alpha|$-mal stetig diffbar) so stimmen schwache und „normale" Ableitungen bis zu der $|\alpha|$-ten überein

Beweis Num PDE

Deswegen verzichten wir im Folgenden auf die Unterscheidung und nennen schwachen Ableitungen Ableitungen.

(8.4) Definition

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

- Für eine skalare Funktion p ist $\operatorname{grad} p = \nabla p = (\partial/\partial x_1 p, \partial/\partial x_2 p, \partial/\partial x_3 p)$ der Gradient
- Für ein Vektorfeld u ist $\operatorname{curl} u = \nabla \times u = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_2 u_3 - \partial/\partial x_3 u_2 \\ -\partial/\partial x_1 u_3 + \partial/\partial x_3 u_1 \\ \partial/\partial x_1 u_2 - \partial/\partial x_2 u_1 \end{pmatrix}$ der Curl oder die Rotation
- Für ein Vektorfeld v ist $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \partial/\partial x_1 v_1 + \partial/\partial x_2 v_2 + \partial/\partial x_3 v_3$

Für $p \in L^1_{loc}(\Omega)$ $v, u \in (L^1_{loc}(\Omega))^3$

ist i) $g = \operatorname{grad} p \in (L^1_{Loc}(\Omega))^3$ der schwache Gradient von p

falls $\int_\Omega g \cdot w \, dx = -\int_\Omega p \cdot \operatorname{div} w \, dx \quad \forall w \in (C_c^\infty(\Omega))^3$

ii) $c = \operatorname{curl} u \in (L^1_{Loc}(\Omega))^3$ der schwache Curl von u

falls $\int_\Omega c \cdot w \, dx = \int_\Omega u \cdot \operatorname{curl} w \, dx \quad \forall w \in (C_c^\infty(\Omega))^3$

iii) $d = \operatorname{div} v \in L^1_{loc}(\Omega)$ die schwache Divergenz von v

falls $\int_\Omega d\, q \, dx = \int_\Omega v \cdot \operatorname{grad} q \, dx \quad \forall q \in C_c^\infty(\Omega)$

(8.5) Definition

Für grad, curl und div definieren wir

$$H(\operatorname{grad}, \Omega) = H^1(\Omega) = \{ w \in L^2(\Omega) : \operatorname{grad} w \in (L^2(\Omega))^3 \}$$

$$H(\operatorname{curl}, \Omega) = \{ w \in (L^2(\Omega))^3 : \operatorname{curl} w \in (L^2(\Omega))^3 \}$$

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{ w \in (L^2(\Omega))^3 : \operatorname{div} w \in L^2(\Omega) \}$$

sind vollständige normierte Vektorräume sogar Hilberträume

mit den Normen

$$\| w \|_{\operatorname{grad},\Omega} = \| w \|_{1,\Omega} = \Big(\underbrace{\| w \|^2_{L^2(\Omega)}}_{=: \| w \|_{0,\Omega}} + | w |^2_{1,\Omega} \Big)^{1/2}$$

$$| w |_{1,\Omega} = \| \operatorname{grad} w \|_{L^2(\Omega)} \quad \leftarrow \text{Seminorm}$$

$$\| w \|_{\operatorname{curl},\Omega} = \left(\| w \|^2_{0,\Omega} + | w |^2_{\operatorname{curl},\Omega} \right)^{1/2}$$

$$| w |_{\operatorname{curl},\Omega} = \| \operatorname{curl} w \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\| w \|_{\operatorname{div},\Omega} = \left(\| w \|^2_{0,\Omega} + | w |^2_{\operatorname{div},\Omega} \right)^{1/2}$$

$$| w |_{\operatorname{div},\Omega} = \| \operatorname{div} w \|_{0,\Omega}$$

und Skalarprodukten $(u, v)_0 = \int_\Omega u \cdot \bar{v} \, dx$ ← komplexe Konjugation

$$(u,v)_{grad} = (u,v)_1 = \int_\Omega \nabla u \,\overline{\nabla v}\, dx + (u,v)_0 \qquad u,v \;\; \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(u,v)_{curl} = \int_\Omega \operatorname{curl} u \cdot \overline{\operatorname{curl} v}\, dx + (u,v)_0 \qquad u,v \;\; \Omega \to \mathbb{R}^3$$

$$(u,v)_{div} = \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx + (u,v)_0 \qquad u,v \;\; \Omega \to \mathbb{R}^3$$

(8.6) Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\phi : \Omega \to \hat{\Omega}$ bijektiv und glatt

Dann gilt für $\qquad \left(\begin{array}{l}\hat{u} : \hat{\Omega} \to \mathbb{R} \\ u : \Omega \to \mathbb{R}\end{array}\right)$

i) $\hat{u} \in H(\text{grad}, \hat{\Omega})$ dass $u := \hat{u} \circ \phi$

$u \in H(\text{grad}, \Omega)$ und

$$\nabla u^T = D\phi^T \left(\hat{\nabla} \hat{u} \circ \phi\right)^T \qquad \left(\nabla u = (\hat{\nabla} \hat{u} \circ \phi)\, D\phi\right)$$

$\uparrow$ Jacobimatrix von ϕ

ii) $\hat{u} \in H(\text{curl}, \hat{\Omega})$ dass $u := D\phi^T \hat{u} \circ \phi \qquad u \in H(\text{curl}, \Omega)$ und

$$\operatorname{curl} u = |D\phi|\, D\phi^{-1}\, \widehat{\operatorname{curl}}\, \hat{u} \circ \phi$$

iii) $\hat{u} \in H(\text{div}, \hat{\Omega})$ dass $u := |D\phi|\, D\phi^{-1}\, \hat{u} \circ \phi \qquad u \in H(\text{div}, \Omega)$ und

$\nwarrow$ Determinante von $D\phi$

$$\operatorname{div} u = |D\phi|\, \widehat{\operatorname{div}}\, \hat{u} \circ \phi$$

Beweis 1) Für glatte Funktionen ist i) die Kettenregel aus Ana II

2) zu iii) Für $v \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(|D\phi|\, D\phi^{-1}_{(x)}\, \hat{u}(\phi(x))\right) v(x)\, dx$$

Def schwache Divergenz

$$= -\int_\Omega \hat{u}(\phi(x)) \cdot D\phi^{-T}_{(x)}\, \nabla v(x)\, |D\phi|\, dx$$

$$= -\int_{\phi(\Omega)} \hat{u}(\hat{x})\, D\phi^{-T}(\phi^{-1}(\hat{x}))\, \underbrace{\nabla v(\phi^{-1}(\hat{x}))}\, d\hat{x}$$

$$\underset{1)}{=} -\int_{\phi(\Omega)} \hat{u}(\hat{x})\, \hat{\nabla} v(\phi^{-1}(\hat{x}))\, d\hat{x}$$

$$= \int_{\phi(\Omega)} \widehat{\operatorname{div}}\, \hat{u}(\hat{x})\, v(\phi^{-1}(\hat{x}))\, d\hat{x}$$

$$= \int_\Omega |D\phi| \operatorname{div} u \cdot v \, dx$$

3) Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt gilt wegen 2) iii)

$\uparrow$ wird in Analysis III gezeigt

4) Analog beweist man i) für den schwachen Gradienten

5) Setzt man

$$\Gamma_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & (i,j,k) \in \{(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so gilt $(\operatorname{curl} u)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

6) Es gilt

$$\operatorname{curl} u = |D\phi|\, D\phi^{-1}\, \widehat{\operatorname{curl}}\, \hat{u} \circ \phi$$

$$u := D\phi^T \hat{u} \circ \phi$$

$$\left[D\phi(x) \operatorname{curl}\left(D\phi^T \hat{u}(\phi(x))\right)\right]_i$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (D\phi(x))_{ij} \left(\operatorname{curl}\left(D\phi^T \hat{u}(\phi(x))\right)\right)_j$$

$$= \sum_{j,k,e=1}^{3} (D\phi(x))_{ij}\, \Gamma_{jke}\, \partial/\partial x_k \left(D\phi^T u(\phi(x))\right)_e$$

$$= \sum_{j,k,e,m=1}^{3} (D\phi(x))_{ij}\, \Gamma_{jke}\, \partial/\partial x_k \left(D\phi_{me}\, u_m(\phi(x))\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j,k,e,m=1}^{3} (D\phi(x))_{ij}\, \Gamma_{jke} \left(\partial/\partial x_k\, D\phi_{me}\right) u_m(\phi(x))}_{=0}$$

$$+ \sum_{j,k,e,m=1}^{3} (D\phi(x))_{ij}\, \Gamma_{jke}\, D\phi_{me}\, \partial/\partial x_k\, u_m(\phi(x))$$

da $\partial/\partial x_k\, D\phi_{me} = \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x_k \partial x_e} = \partial/\partial x_e\, D\phi_{mk}$ $\quad \Gamma_{jke} = -\Gamma_{jek}$

7) $\sum_{j,k,e=1}^{3} D\phi_{ij}\, D\phi_{me}\, D\phi_{nk}\, \Gamma_{jke} = |D\phi|\, \Gamma_{imn}$ $\quad$ $\boxed{\text{ÜA}}$

8) Damit gilt

$$\left(D\phi \operatorname{curl}\left(D\phi^T u \circ \phi\right)\right)_i = \sum_{m,n=1}^{3} |D\phi|\, \Gamma_{inm} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} = |D\phi| \left(\operatorname{curl} u \circ \phi\right)_i$$

□

$\gamma_\Gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$

- $H(\operatorname{curl}, \Omega) \leftarrow$ ·
- $H(\operatorname{div}, \Omega) \leftarrow$ ·