7 Finite Elemente I

(7.1) Definition

Sei $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ Gitter auf $[0,1]$

Wir wählen S_n als den Raum von Funktionen v so dass

i) $v \in C([0,1])$

ii) $v|_{[x_{i-1},x_i]}$ ist Polynom vom Grad ≤ 1

iii) $v(x_0) = 0$

Wir definieren $\phi_i \in S_n$ mit $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$

(7.2) Lemma

$\{\phi_i : i = 1..n\}$ ist eine Basis von S_n

die sogenannte nodale Basis oder Lagrange Basis

Beweis ÜA

(7.3) Definition

Für $v \in C([0,1])$ heißt $S \ni \Pi v := \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\phi_i$

Interpolierende

(7.4) Satz

Sei $h = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_{i-1} - x_i|\}$ Dann gilt für

$u \in V$

$$\|u - \Pi u\|_a \leq C h \|u''\|$$

für eine Konstante C unabhängig von h und u

<u>Beweis</u> Für eine C^1 Funktion w auf $[0,1]$ mit $w(0) = 0 = w(1)$ gibt es $\xi \in [0,1]$ so dass

$$w'(\xi) = 0$$

Also ist

$$w'(y) = \int_\xi^y w''(x)\,dx$$

und damit

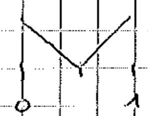
$$|w'(y)| = \left|\int_\xi^y 1 \cdot w''(x)\,dx\right|$$

$$\leq \left|\int_\xi^y 1\,dx\right|^{1/2} \left|\int_\xi^y (w''(x))^2\,dx\right|^{1/2}$$

$$= |y-\xi|^{1/2} \left(\int_\xi^y (w''(x))^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\leq |y-\xi|^{1/2} \left(\int_0^1 (w''(x))^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (w'(y))^2\,dy \leq \underbrace{\int_0^1 |y-\xi|\,dy}_{\leq 1/2} \int_0^1 (w''(x))^2\,dx \qquad (\Delta)$$



Für den Fehler $e = u - \Pi u$ gilt auf $[x_{j-1}, x_j]$

$e(x_{j-1}) = 0 = e(x_j)$ und da Πu linear (Polynomgrad ≤ 1) auf $[x_{j-1}, x_j]$ ist, gilt $e'' = u''$ auf $[x_{j-1}, x_j]$

Wir betrachte auf $[x_{j-1}, x_j]$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (e'(y))^2\,dy = \int_0^1 (\tilde{e}'(\tilde{y}))^2\,d\tilde{y}\ \frac{x_j - x_{j-1}}{(x_j - x_{j-1})^2}$$

$$y = x_{j-1} + \tilde{y}\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\tilde{e}(\tilde{y}) = e(y(\tilde{y})) \qquad \frac{d\tilde{e}}{d\tilde{y}} = e'(y(\tilde{y}))\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\frac{dy}{d\tilde{y}} = x_j - x_{j-1} \qquad dy = (x_j - x_{j-1})\,d\tilde{y}$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (e''(y))^2\,dy = \int_0^1 (\tilde{e}''(\tilde{y}))^2\,d\tilde{y}\ \frac{x_j - x_{j-1}}{(x_j - x_{j-1})^4}$$

$$\frac{d^2}{d\tilde y^2}\tilde e = \frac{d^2}{d\tilde y^2} e(y(\tilde y)) = \frac{d}{d\tilde y}\left(e'(y(\tilde y))\,(x_j - x_{j-1})\right)$$

$$= e''(y(\tilde y))\,(x_j - x_{j-1})^2$$

$$\overset{(\Delta)}{\Rightarrow} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (e'(y))^2\,dy \le \tfrac{1}{2}(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} (e''(y))^2\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left((u - \Pi u)'(y)\right)^2 dy \le \tfrac{1}{2}(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u''(y))^2\,dy$$

Summation über j von 1 bis n liefert die Behauptung mit $C = \sqrt{1/2}$ □

(7.5) Folgerung

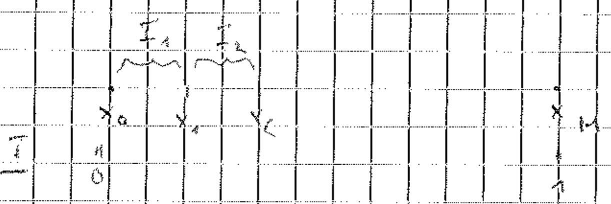
$$\|u - u_S\| \le Ch\|u - u_S\|_a \le 2(Ch)^2\|u''\|$$

Beweis $\boxed{\text{ÜA}}$

(7.6) Implementierung finiter Elemente

Ziel: Berechnung der Matrix A sowie des rechte Seite Vektors (Assemblierung)

Zusammensetzen aus den Bestandteilen die auf jedem Teilbereich berechnet werden



$I_e = [x_{e-1}, x_e]$ $e = 1 \dots M$

Für jedes Teilintervall (Element) sind die Nummern des linken Randpunkts ($j=0$) und des rechten Randpunktes ($j=1$) von Interesse

33 $i(e, j)$

Die Interpolierende einer Funktion u kann als

$$\Pi u = \sum_{e=1}^{M} \sum_{j=0}^{1} u(x_{i(e,j)})\, \phi_j^e$$

geschrieben werden. Hierbei ist ϕ_j^e ein Polynom vom Grad ≤ 1 auf I_e

$$\phi_j^e(x) = \phi_j((x - x_{e-1})/(x_e - x_{e-1}))$$

mit $\phi_0(\hat{x}) = \begin{cases} 1-\hat{x} & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\phi_1(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{x} & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$x \mapsto \hat{x} = \dfrac{x - x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}}$ ist Abb von I_e auf $[0,1]$

$I_e \to [0,1]$

Allgemein werden Basisfunktionen auf einem Element (hier I_e) mit Hilfe von Basisfunktionen auf einem Referenzelement (hier $[0,1]$) definiert

Die Berechnung von (f,v) erfolgt teilintervallweise (elementweise

$$(f,v) = \sum_{e=1}^{M} (f,v)_e$$

mit $(f,v)_e = \int_{I_e} f\, v\, dx$

$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{1} f(x(\hat{x}))\, v_{i(e,j)}\, \phi_j(\hat{x})\, d\hat{x}$$

$$(x_{i(e,1)} - x_{i(e,0)})$$

$$= (x_{i(e,1)} - x_{i(e,0)}) \sum_{j=0}^{1} \int_0^1 f(x_{i(e,0)} + \hat{x}(x_{i(e,1)} - x_{i(e,0)}))$$

$$\phi_j(\hat{x})\, d\hat{x}$$

Ebenso die Auswertung der Bilinearform

$$a(u,v) = \sum_{e=1}^{M} a_e(u,v)$$

mit $a_e(u,v) := \int_{I_e} u' v' \, dx$

$$= \frac{1}{x_{i(e,1)} - x_{i(e,0)}} \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{1} u_{i(e,j)} \phi_j \right)' \left(\sum_{m=0}^{1} v_{i(e,m)} \phi_m \right)' d\hat{x}$$

$$= \frac{1}{x_{i(e,1)} - x_{i(e,0)}} \begin{pmatrix} u_{i(e,0)} \\ u_{i(e,1)} \end{pmatrix}^T A_{loc} \begin{pmatrix} v_{i(e,0)} \\ v_{i(e,1)} \end{pmatrix}$$

mit der lokalen Matrix A_{loc}

$$(A_{loc})_{i,j} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx \qquad i,j = 0,1$$