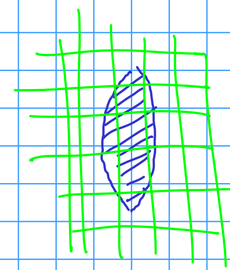
6. Variationelle Formulierung

<u>Ziel</u> Diskretisierung der Maxwell-/Wellengleichung auf nicht strukturierten Gitter für krummberandete Materialinterfaces / Rechengebiete

Dazu werden wir zuerst im Ort (in x bzw. (x,y,z)) recht beliebige Gitter einführen und dort

$\underline{\Delta}$, $\underline{\nabla}$, $\underline{\mathrm{curl}}$, $\underline{\mathrm{div}}$, $\underline{\partial_{xx}}$ diskretisieren



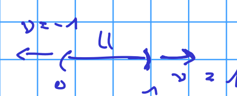
(6.1) Variationelle / Schwache Formulierung

Wir betrachten

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \partial_{xx}$$

$$\rightarrow \quad (*) \begin{cases} -\partial_{xx} u = f & \text{für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 & \partial_x u(x)\big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

$u(0)=0$: Dirichletrandbedingung; $\partial_x u(x)\big|_{x=1} = 0$: Neumannrandbedingung



$f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$u : (0,1) \to \mathbb{R}$

Falls u Lösung von $(*)$ ist und v eine hinreichend glatte Funktion mit $\underline{v(0) = 0}$ so gilt

$$\underbrace{\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx}_{=:(f,v)_{L^2}} = \int_0^1 -\partial_{xx} u(x) \cdot v(x)\, dx \overset{PI}{=} \underbrace{\int_0^1 \partial_x u(x) \cdot \partial_x v(x)\, dx}_{=:a(u,v)} - \overbrace{\overbrace{\partial_x u(1)}^{=0} \cdot v(1)}^{=0} + \underbrace{\partial_x u(0) \cdot \underbrace{v(0)}_{=0}}_{=0}$$

Sei $V := \{ u \in L^2((0,1)) : a(v,v) < \infty$ und $v(0) = 0 \}$, wobei $a(v,v) = \int_0^1 (v')^2\, dx$

($\partial_x v$ und $v(0)$ für $v \in V$ werden später erklärt)

Dann ist die Lösung u von $(*)$ durch

„ $u \in V$ erfüllt $a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V$ " $\qquad (\#)$

charakterisiert. Die Charakterisierung heißt variationelle / schwache Formulierung

„ Finde $u \in V$ mit $a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V$ " $\qquad (\#)$

(6.2) Satz

Sei $f \in C([0,1])$ und $u \in C^2([0,1])$ erfülle (#). Dann ist u Lösung von $(*)$

Beweis Sei $v \in V \cap C^1([0,1])$ dann gilt

$$(f,v) = a(u,v) = \int_0^1 (-u'')(x)\, v(x)\, dx + u'(1)v(1) - \underbrace{u'(0)\overset{=0}{\widetilde{v(0)}}}_{=0}$$

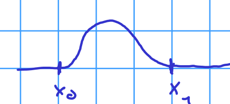
$$\Rightarrow \quad (\underbrace{f-(-u'')}_{=:w}, v) = 0 \quad \text{für } v \in C^1([0,1]) \cap V \text{ mit } v(1) = 0$$

zu zeigen $w \equiv 0$

Falls $w \not\equiv 0$ so ist $w(x) > 0$ auf $[x_0, x_1]$ (oder $w(x) < 0$ auf $[x_0, x_1]$)

für $x_0, x_1 \in (0,1)$

Wähle $v(x) = \begin{cases} (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 & x \in (x_0, x_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$v \in C^1$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 w \cdot v \, dx \neq 0 \quad ↯$$

Also ist $w \equiv 0 \Rightarrow -u'' = f$

Wähle $v(x) = x$ Dann ist

$$\int_0^1 f(x) \cdot x \, dx = \int_0^1 -u''(x) \cdot x \, dx + u'(1) \cdot 1$$

$\Rightarrow \quad u'(1) = 0$

$u(0) = 0$ nach Definition da $u \in V$ □

(6.3) Definition

Die Randbedingung $u(0) = 0$ heißt essentielle oder homogene Dirichletrand-bedingung. Sie ist Teil des Lösungsraums V.

Die Randbedingung $u'(1) = 0$ heißt natürliche oder homogene Neumannrand bedingung. Sie ist in der variationellen Formulierung enthalten

(6.4) Ritz - Galerkin Verfahren

Sei $S \leq V$ ein beliebiger endlich dimensionaler Teilraum von V

Dann betrachten wir das Problem

" Finde $u_S \in S$ so, dass $a(\underline{u_S}, v) = (f, v) \quad \forall v \in S$ " $\quad (\#\#)$

Das ist eine Diskretisierung von $(*)$ bzw $(\#)$

<u>Satz</u> Ist $f \in L^2((0,1))$ so hat $(\#\#)$ eine eindeutige Lösung

<u>Beweis</u> Sei $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ Basis von S. Dann ist $\underset{\in}{\overset{L^2}{u_S}} = \sum_{i=1}^N \underset{\mathbb{R}}{u_i} \overset{L^2}{\varphi_i}$

Wir setzen $\quad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \varphi_i'(x)\, \varphi_j'(x)\, dx$

$\quad f_i = (f, \varphi_i)$

Dann ist $(\#\#)$ äquivalent zu

$$\boxed{A\underline{u} = \underline{f}} \qquad u_S = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N \qquad \underline{u} = (u_1 \ldots u_N)^T \qquad \underline{f} = (f_1 \ldots f_N)^T$

Daher reicht es zu zeigen, dass $\ker(A) = \{0\}$

Sei

$$A\underline{v} = 0 \qquad \underline{v} = (v_1 \ldots v_N)^T$$

Dann gilt für $v = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$

$$a(v, \varphi_j) = 0 \quad \text{für } j = 1 \ldots N$$

$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^N v_i\, a(v, \varphi_i) = a(v,v) = \int_0^1 (v')^2\, dx$

$\Rightarrow \quad v' \equiv 0$

$\Rightarrow \quad v$ konstant

$\Rightarrow \quad v = 0 \quad$ da $v \in V$ und damit $v(0) = 0$

$\square$

(6.5) <u>Bemerkung</u> In dem Beweis sind zwei offene Punkte

i) $v' \equiv 0$ in $L^2 \rightsquigarrow v$ konstant

ii) $v(0) = 0$ in L^2

Wir zeigen später dass man so argumentieren darf.

(6.6) Fehlerabschätzung

Es gilt folgende Orthogonalitätsrelation

$$a(\underbrace{u - u_S}_{\uparrow}, v) = 0 \quad \forall \; v \in S$$

für die Lösung u und die Ritz Galerkinlösung u_S

Für $v \in V$ definieren wir Energienorm

$$\| v \|_a := \left(a(v,v) \right)^{1/2}$$

$\uparrow$ a Skalarprodukt

Dann gilt die Cauchy Schwarzsche Ungleichung

$$| a(u,v) | \leq \| u \|_a \| v \|_a \qquad \forall \; u, v \in V$$

Es gilt für $v \in S$

$$
\begin{aligned}
\| u - u_S \|_a^{\cancel{2}} &= a(u - u_S, u - u_S) \\
&= a(u - u_S, u - v) + \underbrace{a(u - u_S, \underbrace{v - u_S}_{\in S})}_{=0} \\
&= a(u - u_S, u - v) \\
&\leq \| \cancel{u - u_S} \|_a \, \| u - v \|_a
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \| u - u_S \|_a \leq \| u - v \|_a \qquad \forall \; v \in S$$

$$\Rightarrow \| u - u_S \|_a \leq \inf_{v \in S} \| u - v \|_a$$

Da $u_S \in S$ gilt $\quad \| u - u_S \|_a \geq \inf_{v \in S} \| u - v \|_a$

$$\Rightarrow \| u - u_S \|_a \underset{\uparrow}{=} \inf_{v \in S} \| u - v \|_a = \min_{v \in S} \| u - v \|_a$$

da für $v = u_S$ das Minimum angenommen wird

Satz

$$\| u - u_S \|_a = \min \{ \| u - v \|_a : v \in S \}$$

Die Ritz Galerkin Lösung u_S ist in der $\| \; \|_a$-Norm die beste Approximation an u in S.

(6.7) **Satz**

Seien u und u_S Lösungen von (#) und (##) und $\underline{u \in C^2}$

Falls $\inf_{v \in S} \| w_u - v \|_a \leq \varepsilon \| w_u'' \|_{L^2}$ (Approximationseigenschaft von S)

für beliebiges $w \in C^2([0,1])$ und eine (kleine) Zahl ε

so gilt für den Fehler

$$\| u - u_S \|_{L^2} \leq \varepsilon \| u - u_S \|_a \leq \varepsilon^2 \| u'' \|_{L^2} = \varepsilon^2 \| f \|_{L^2}$$

Beweis Nitsche Trick

Sei w Lösung von

$$\begin{cases} -w'' = u - u_S & \text{in } (0,1) \\ w'(1) = 0 \quad w(0) = 0 & \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\| u - u_S \|_{L^2}^2 &= (u - u_S, u - u_S) \\
&= (u - u_S, -w'') = \int_0^1 (u - u_S) \cdot (-w'') \, dx \\
&\underset{\text{Randterm} = 0}{\overset{PI}{=}} a(u - u_S, w) \\
&= a(u - u_S, w - v) \quad \text{für } v \in S
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \| u - u_S \|_{L^2} \leq \| u - u_S \|_a \frac{\| w - v \|_a}{\| u - u_S \|_{L^2}}$$

$$= \| u - u_S \|_a \frac{\| w - v \|_a}{\| w'' \|_{L^2}}$$

$$\Rightarrow \| u - u_S \|_{L^2} \leq \| u - u_S \|_a \inf_{v \in S} \frac{\| w - v \|_a}{\| w'' \|_{L^2}}$$

$$\leq \| u - u_S \|_a \cdot \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon^2 \| u'' \|_{L^2} = \varepsilon^2 \| f \|_{L^2}$$

nochmaliges anwenden der Approximationseigenschaft da $u \in C^2$

$\square$