$$\| \partial_t e \| \leq C h^2 t$$

$$\| e(t) \| \underset{\substack{\uparrow \\ e(0)=0}}{=} \left\| \int_0^t \partial_t e \, d\tau \right\| \leq \int_0^t \| \partial_t e \| \, d\tau \leq C t^2 h^2$$

$$\tilde{\delta}_r = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \delta_r E_r = \frac{1}{\Delta r} \left(E_{i+1/2} - E_{i-1/2} \right)$$

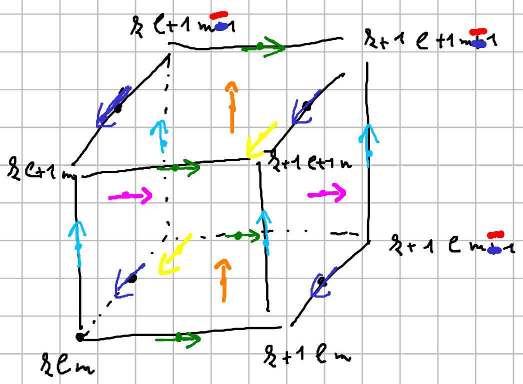
i : Index für Koordinate r

$$E = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

$E_x \; k+1/2 \; \ell \; m$ $\qquad$ $H_x \; k \; \ell+1/2 \; m+1/2$

$E_y \; k \; \ell+1/2 \; m$ $\qquad$ $H_y \; k+1/2 \; \ell \; m+1/2$

$E_z \; k \; \ell \; m+1/2$ $\qquad$ $H_z \; k+1/2 \; \ell+1/2 \; m$

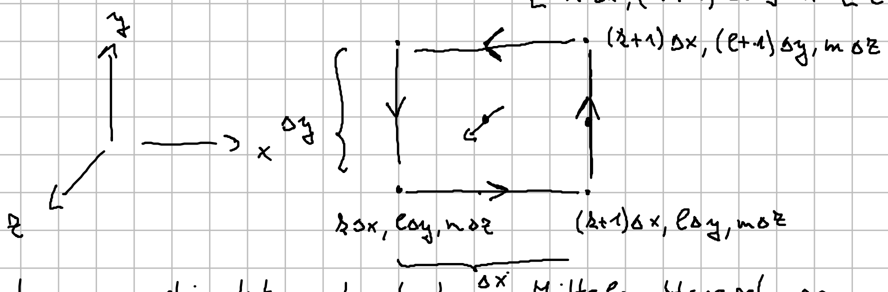


(6.3) Bemerkung Das Faradaysche Gesetz in Integralform

$$\partial_t \int_S b = - \int_{\partial S} e \quad \text{für eine zweidimensionale Fläche } S$$

angewandt auf Seitenfläche

$$[k\Delta x, (k+1)\Delta x] \times [\ell \Delta y, (\ell+1)\Delta y] \times m \Delta z$$



liefert, wenn die Integrale durch Mittelpunktsregel approximiert

$$\partial_t \cancel{\Delta x \Delta y} \, B_{z \, k+1/2 \, \ell+1/2, m} \qquad B_z\left(k+\tfrac{1}{2}\Delta x, \ell+\tfrac{1}{2}\Delta y, m\Delta z\right)$$

$$= - \Big\{ \underbrace{\cancel{\Delta x} \tfrac{1}{\Delta y} E\left(k+\tfrac{1}{2}\Delta x, \ell\Delta y, m\Delta z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= E_{x \; k+1/2 \; \ell \; m}}$$

$\uparrow$ Tangentialvektor

$$\delta_y E_{k+1/2, \ell+1/2, m} = \tfrac{1}{\Delta y} \left(E_{k+1/2, \ell+1, m} - E_{k+1/2, \ell, m} \right) \leftarrow$$

$$\cancel{\Delta y} \tfrac{1}{\Delta x} E\left((k+1)\Delta x, (\ell+\tfrac{1}{2})\Delta y, m\Delta z\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= E_{y\; k+1\; l+1/2\; m}$$

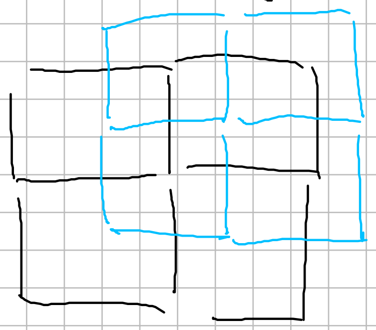
$$+ \cancel{\Delta x}\tfrac{1}{\Delta y}\underbrace{E\big((k+\tfrac12)\Delta x,\,(l+1)\Delta y,\,m\Delta z\big)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{-E_{x\; k+1/2,\, l+1,\, m}}$$

$$+ \cancel{\Delta y}\tfrac{1}{\Delta x}\underbrace{E\big(k\Delta x,\,(l+\tfrac12)\Delta y,\,m\Delta z\big)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}_{-E_{y\; k\; l+1/2\; m}}\Bigg]$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t B_{z\; k+1/2\; l+1/2\; m} = -\delta_y \underbrace{E_{x\; k+1/2,\, l+1/2,\, m}} + \delta_x E_{y\; k+1/2,\, l+1/2,\, m}$$

wobei
$$\delta_y E_{x\; k+1/2\; l+1/2,\, m} = \tfrac{1}{\Delta y}\big(\underline{E_{x\; k+1/2\; l+1,\, m}} - \underline{E_{x\; k+1/2,\, l,\, m}}\big)$$
$$\delta_x E_{y\; k+1/2,\; l+1/2,\, m} = \tfrac{1}{\Delta x}\big(E_{y\; k+1,\, l+1/2,\, m} - E_{y\; k,\, l+1/2,\, m}\big)$$

Analog für das duale Gitter für das Amperesche Gesetz



Damit kann man das Yee Schema als Finites Integrationsverfahren angewandt auf die Seitenflächen eines Würfels mit Kantenlänge $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ verstehen.

(5.4) Satz (Lokaler Fehler)

Das Yee Schema hat die Konsistenzordnung 2

Beweis Skizze: mühsame Taylorentwicklung

jeder Differentialoperator wird durch den entsprechenden symmetrischen Differenzenoperator approximiert. $\square$

(5.5) Von Neumannsches Stabilitätskriterium

Sei $\sigma = 0$ und ε und μ konstant

$$(*)\left\{\begin{aligned} \varepsilon\,\partial_t E &= -\,\mathrm{curl}\, H \\ \mu\,\partial_t H &= \mathrm{curl}\, E \end{aligned}\right. \qquad \mathrm{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} E|_{t=0} &= E^0 \\ H|_{t=0} &= H^0 \end{aligned}\right\} \text{ Anfangswerte}$$

Ansatz

$$\psi(x,y,z,t) = \psi^0 \cdot e^{i(-x p_x - y p_y - z p_z)}\, e^{i\omega t}$$

für Vektor ψ^0

$$\psi(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} E(x,y,z,t) \\ H(x,y,z,t) \end{bmatrix}$$

erfüllt die Maxwellgleichungen, falls die Dispersionsrelation

$$\mu\varepsilon\omega^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad \text{erfüllt ist}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon i\omega\, E_x &= -ip_z H_y + ip_y H_z \\
\varepsilon i\omega\, E_y &= ip_z H_x - ip_x H_z \\
\varepsilon i\omega\, E_z &= -ip_y H_x + ip_x H_y \\
\mu i\omega\, H_x &= ip_z E_y - ip_y E_z \\
\mu i\omega\, H_y &= -ip_z E_x + ip_x E_z \\
\mu i\omega\, H_z &= ip_y E_x - ip_x E_y
\end{aligned}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}
\varepsilon i\omega & 0 & 0 & 0 & ip_z & -ip_y \\
0 & \varepsilon i\omega & 0 & -ip_z & 0 & ip_x \\
0 & 0 & \varepsilon i\omega & p_y & -ip_x & 0 \\
0 & -ip_z & ip_y & \mu i\omega & 0 & 0 \\
ip_z & 0 & -ip_x & 0 & \mu i\omega & 0 \\
-ip_y & ip_x & 0 & 0 & 0 & \mu i\omega
\end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mu\varepsilon\omega^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Diskreter Ansatz

$$\psi^n_{klm} = \psi^0\, e^{i(r n\Delta t - k\Delta x\, p_x - l\Delta y\, p_y - m\Delta z\, p_z)} \leftarrow$$

$$\psi^n_{klm} = \begin{bmatrix} E^{n-1/2}_{klm} \\ H^n_{klm} \end{bmatrix}$$

eingesetzt in das klassische Yee Schema führt zu

$$\left(\Lambda_t I_6 - \Lambda_R\right)\psi^{n+1/2}_{klm} = 0 \quad \leftarrow$$

mit I_6 6×6 Identität $\qquad \Lambda_t = \frac{2i}{\Delta t}\sin\left(r\,\frac{\Delta t}{2}\right)$

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_z & \Lambda_y \\ \Lambda_z & 0 & -\Lambda_x \\ -\Lambda_y & \Lambda_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_R = \begin{pmatrix} 0_{3\times 3} & 1/\varepsilon\,\Lambda_r \\ -1/\mu\,\Lambda_r & 0_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_x = \frac{2i}{\Delta x} \sin\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) \qquad \Lambda_y = \frac{2i}{\Delta y} \sin\left(\beta_y \frac{\Delta y}{2}\right)$$

$$\Lambda_z = \frac{2i}{\Delta z} \sin\left(\beta_z \frac{\Delta z}{2}\right)$$

$$\ulcorner \quad \delta_\alpha e^{i\beta_\alpha \Delta\alpha n} = 1/_{\Delta\alpha} \left(e^{i\beta_\alpha \Delta\alpha (n+1/2)} - e^{i\beta_\alpha \Delta\alpha (n-1/2)} \right)$$

$$= e^{i\beta_\alpha \Delta\alpha n} \left(1/_{\Delta\alpha} \left(e^{i\beta_\alpha \Delta\alpha 1/2} - e^{-i\beta_\alpha \Delta\alpha 1/2} \right) \right)$$

$$= e^{i\beta_\alpha \Delta\alpha n} \frac{2i}{\Delta\alpha} \sin\left(\beta_\alpha \tfrac{1}{2} \Delta\alpha\right) \quad \lrcorner$$

Damit eine nichttriviale Lösung $\Psi^{n+1/2}_{\ell e n}$ existiert muss

$$\det \left(\Lambda_t I - \Lambda_R \right) = 0 \quad \text{gelten}$$

$$\rightsquigarrow \quad \varepsilon\mu \Lambda_t^2 = \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2$$

einsetzen liefert für $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

$$1/_{c^2\Delta t^2} \sin^2\left(\Omega \frac{\Delta t}{2}\right) = 1/_{\Delta x^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + 1/_{\Delta y^2} \sin^2\left(\beta_y \Delta y/_2\right) + 1/_{\Delta z^2} \sin^2\left(\beta_z \Delta z/_2\right)$$

Eine notwendige Bedingung für die Beschränktheit der Lösung für $n \to \infty$

ist
$$\left| e^{i\Omega \Delta t} \right| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im}(\Omega) \geq 0$$

Das ist erfüllt, falls

$$c^2 \Delta t^2 \left(1/_{\Delta x^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + 1/_{\Delta y^2} \sin^2\left(\beta_y \frac{\Delta y}{2}\right) + 1/_{\Delta z^2} \sin^2\left(\beta_z \frac{\Delta z}{2}\right) \right) \leq 1$$

Was immer erfüllt ist, falls

$$\Delta t \left(1/_{\Delta x^2} + 1/_{\Delta y^2} + 1/_{\Delta z^2} \right)^{1/2} < 1/_c$$

CFL Bedingung für das Yee Schema für Maxwellgleichung mit μ ε konstant $\sigma = 0$

Dann ist $\operatorname{Im}(\Omega) = 0$

Auf einem äquidistanten Gitter $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$

wird die CFL Bedingung zu $\sqrt{3}\, \Delta t/_\Delta < 1/_c$

Man kann zeigen, dass die CFL Bedingung für homogene Materialien

und geeignete Randbedingungen auch hinreichend für die Stabilität ist.