(4.10) Satz Das Differenzenverfahren (Δ) ist genau dann numerisch stabil, wenn die CFL Bedingung erfüllt ist. Ist die Lösung hinreichend glatt so gilt

$$\left[\ \max_{t_m \in [0,T]} \| \underbrace{u^{(m)}}_{\begin{pmatrix} u_1^m \\ \vdots \\ u_N^m \end{pmatrix}} - \underbrace{u(\cdot, t_m)}_{\begin{pmatrix} u(x_1,t_m) \\ \vdots \\ u(x_N,t_m) \end{pmatrix}} \|_h \leq c(u)\, T^2 \left(h^2 + \tau^2\right) \quad \boxed{\tau < 1/c \cdot h}\ \right]$$

Beweis Sei $\tau^2 \lambda_N \leq 4$ $\qquad \tau/h \leq 1/c$ CFL

$\left[\ \lambda_j \text{ Eigenwerte von } -\delta_x^2 \ \right]$, $j = 1..N$ $\qquad \tau \leq 1/c\ h$ ← Ortsgitterweite

↑ Zeitschrittweite

Für den Fehler gilt

$$u(x_n, t_m) - u_n^m = u(x_n, t_m) - u_h(t_m)_n + \underbrace{u_h(t_m)_n - u_n^m}$$

wobei $u_h(t_m)$ die Lösung der nur (im Ort) in x diskretisierten Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} u_h(t) = \delta_x^2 u_h(t)$$

ist mit

$$u_h(t) = \begin{bmatrix} u_h(t)_1 \\ \vdots \\ u_h(t)_N \end{bmatrix}$$

Der Ortsdiskretisierungsfehler $\varepsilon_h(t) = u_h(t) - u(\underset{x_1 \cdots x_N}{\cdot}, t) \in \mathbb{R}^N$

erfüllt $\varepsilon_h(0) = 0 = \partial_t \varepsilon_h(t)\big|_{t=0}$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varepsilon_h(t) = \delta_x^2 \varepsilon_h(h) + \mathcal{O}(h^2)$$

Multiplikation mit $\frac{d}{dt} \varepsilon_h(t)$

$$\rightsquigarrow \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \varepsilon_h(t), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \right\rangle_h = \left\langle \delta_x^2 \varepsilon_h(t), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \right\rangle_h + h^2 \left\langle r(t), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \right\rangle_h$$

Symmetrie von δ_x^2 und $\langle\ \rangle$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \right\rangle_h}_{\| \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \|_h} - \left\langle \delta_x^2 \varepsilon_h(t), \varepsilon_h(t) \right\rangle_h \right\} = h^2 \left\langle r(t), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \right\rangle_h$$

Integration $\int_0^t$ $\rightsquigarrow$

$$\left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \right\|_h^2 - \underbrace{\left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_h(0) \right\|}_{=0} - \underbrace{\left\langle \delta_x^2 \varepsilon_h(t), \varepsilon_h(t) \right\rangle_h}_{\leq 0} + \left\langle \delta_x^2 \varepsilon_h(0), \underbrace{\varepsilon_h(0)}_{=0} \right\rangle = 2h^2 \int_0^t \left\langle r(\tau), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(\tau) \right\rangle_h d\tau$$

? $\boxed{?}$?

$$\max_{\tau \in [0,t]} \| \varepsilon_h(\tau) \|_h \leq C h^2 t^2$$

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon_h(t), \varepsilon_h(t) \rangle = 2 \langle \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t), \varepsilon_h(t) \rangle$$

$$\| \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \|_h^2 \leq 2h^2 \int_0^t \underbrace{\langle r(\tau), \frac{d}{dt} \varepsilon_h(\tau) \rangle_h}_{\leq \| r(\tau) \|_h \| \frac{d}{dt} \varepsilon_h(\tau) \|_h} d\tau$$

$$\max_t \| \frac{d}{dt} \varepsilon_h(t) \|_h^2 \leq 2h^2 \max_t \| \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \|_h \, C$$

Zeitdiskretisierungsfehler

$$E^m := u_h(t_m) - u^m.$$

Konstante hängt von $d^3/dt^3\, u(t)$ und $d^4/dt^4\, u(t)$ ab

$$1/\tau^2 \left(E^{m+1} - 2 E^m + E^{m-1} \right) = \delta_x^2 E^m + \mathcal{O}(\tau^2)$$

Sei $\omega^{(n)}$ Eigenvektor zu $-\delta_x^2$ zum Eigenwert λ_n dann gilt für

$$E_n^m := \langle E^m, \omega^{(n)} \rangle_h$$

$$E_n^{m+1} - 2 E_n^m + E_n^{m-1} + \tau^2 \lambda_n E_n^m = \tau^4 \langle r^m, \omega^{(n)} \rangle_h \quad \text{für } r \in \mathcal{O}(1) \quad | \cdot \tau^2$$

Das charakteristische Polynom zu dieser Differenzengleichung ist

$$X^2 + (\lambda_n \tau^2 - 2) X + \underline{1}$$

mit Wurzeln

$$X_{1,2} = \frac{2 - \tau^2 \lambda_n \pm \sqrt{(2 - \tau^2 \lambda_n)^2 - 4}}{2} \quad \text{und} \quad |X_{1,2}| = 1$$

mit dem folgenden Lemma

<u>Lemma</u> Ist $\sum_{k=0}^{K} a_k u_{m+k} = g_m$ für $m \in \mathbb{N}_0$ $(a_k, u_k, g_k \in \mathbb{C})$ und sind alle Wurzeln von $g(X) = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$ betragsmäßig kleiner als 1 so gilt für $m \geq K$

$$\max_{K \leq k \leq m} |u_k| \leq C \left\{ \max_{0 \leq k \leq K-1} |u_k| + m^2 \max_{0 \leq k \leq \underline{\underline{m}}} |g_k| \right\}$$

<u>Beweis</u>: ÜA (Numerik ODE)

$$E_n^{m+1} - 2 E_n^m + E_n^{m-1} + \tau^2 \lambda_n E_n^m = \tau^4 \langle r^m, \omega^{(n)} \rangle_h \qquad K = 2$$

$$|E_n^{m+1}| \leq C \left(\max\left\{ \underbrace{|E_n^0|}_{=0}, |E_n^1| \right\} + \tau^4 m^2 \max_{e = 0..m} \langle r^e, \omega^{(n)} \rangle_h \right) \qquad \tau m < t$$

$$\Rightarrow \quad \| \mathcal{E}^m \|_h^2 \leq C \left\{ \underline{\| \mathcal{E}^1 \|_h^2} + c\, \tau^4 t^4 \right\}$$

$$\underline{\mathcal{E}^1} = u_h(t_1) - u^1_\cdot = u_h(t_1) - u^0_\cdot - \tau v^0_\cdot + \tfrac{1}{2} c^2 \tau^2 \delta_x^2 u^0$$

$$= \underbrace{u_h(t_1) - u(\cdot, t_1)}_{\varepsilon(t_1)} + u(\cdot, t_1) - u^0_\cdot - \tau v^0 + \tfrac{1}{2} c^2 \tau^2 \delta_x^2 u^0$$

$$+ \underbrace{u(\cdot, t_1) - \underbrace{u^0}_{u(\cdot,t_0)} - \tau \partial_t u(\cdot, t_0) + \tfrac{1}{2} c^2 \tau^2 \partial_{xx} u(t_0)}_{+\, \mathcal{O}(\tau^3)} + \underline{\underline{\mathcal{O}(\tau^2 h^2)}}$$

$$= \mathcal{O}(\tau^2 h^2)$$

$$\Rightarrow \quad \| \mathcal{E}^m \|_h^2 \leq C \left(\tau^6 + \tau^4 h^4 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \| u(\,, t_m) - u^m \|_h \leq C\, t^2 (\tau^2 + h^2)$$

$\square$

5. Das Yee-Schema

Die E-H Formulierung (für lineare isotrope nicht dispersive Materialien) ist

$$\mu\, \partial_t H = -\operatorname{curl} E \qquad\qquad \operatorname{curl} \mathbb{R}^{3,3} \begin{bmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon\, \partial_t E = \operatorname{curl} H + \sigma E$$

E H Koordinatenfunktionen der 1 Formen e und h

Approximieren wir E und H auf einem Gitter $\{ k\Delta x, \ell \Delta y, m \Delta z, n \Delta t \}$

durch

$$E(\underbrace{k\Delta x}_{x}, \underbrace{\ell \Delta y}_{y}, \underbrace{m \Delta z}_{z}, \underbrace{n \Delta t}_{t}) \approx E^n_{k\ell m}$$

$$H(\quad \text{"} \quad) \approx H^n_{k\ell m}$$

und setzen $\varepsilon_{k\ell m} := \varepsilon(k\Delta x, \ell\Delta y, m\Delta z)$ und $\mu_{k\ell m}$ und $\sigma_{k\ell m}$

entsprechend

(5.1) Definition / Yee Schema

Mit dieser Notation ist das Yee-Schema durch

$$\varepsilon_{k\ell m}\, \delta_t E^n_{k\ell m} = \tilde{\delta}_r H^n_{k\ell m} + \sigma_{k\ell m}\, a_t E^n_{k\ell m}$$

$$\mu_{k\ell m}\, \delta_t H^n_{k\ell m} = -\tilde{\delta}_r E_{k\ell m}$$

mit $\tilde{\delta}_r = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad a_t E^n_{k\ell m} := \tfrac{1}{2} \left(E^{n+1/2}_{k\ell m} + E^{n-1/2}_{k\ell m} \right)$

$$\delta_x E^n_{k\ell m} = \tfrac{1}{\Delta x} \left(E^n_{k+1/2\,\ell m} - E^n_{k-1/2\,\ell m} \right)$$

$$\delta_y \, E^n_{klm} = \frac{1}{\Delta y} \left(E^n_{k\,l+1/2\,m} - E^n_{k\,l-1/2\,m} \right)$$
$$\delta_z \, E^n_{klm} = \frac{1}{\Delta z} \left(E^n_{kl\,m+1/2} - E^n_{kl\,m-1/2} \right)$$

gegeben

(5.2) <u>Bemerkung</u>

Das Yee Schema benötigt nicht alle Feldgrößen auf dem Gitter mit Gitterweite $\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta z}{2}, \Delta t/2$

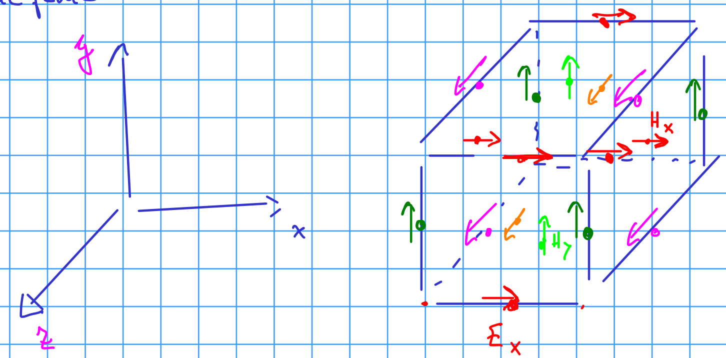
Es reicht das elektrische Feld E auf dem Gitter $(n+1/2)\Delta t$ für $n \in \mathbb{Z}$ und das magnetische Feld auf $n \Delta t$ für $n \in \mathbb{Z}$ zu definieren

$$\varepsilon_{klm} \, \delta_t \, E^n_{klm} = \tilde{\delta}_r \, H^n_{klm} + \sigma_{klm} \, a_t \, E^n_{klm}$$
$$\mu_{klm} \, \delta_t \, H^{n+1/2}_{klm} = - \tilde{\delta}_r \, E^{n+1/2}_{klm}$$

Damit erhält man ein explizites Verfahren

$$\left\{ \begin{aligned} E^{n+1/2}_{klm} &= \frac{\varepsilon_{klm} + \sigma_{klm} \, \Delta t/2}{\varepsilon_{klm} - \sigma_{klm} \, \Delta t/2} \, E^{n-1/2}_{klm} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{klm} - \sigma_{klm} \, \Delta t/2} \, \tilde{\delta}_r \, H^n_{klm} \\ H^{n+1}_{klm} &= H^n_{klm} - \frac{\Delta t}{\mu_{klm}} \, \tilde{\delta}_r \, E^{n+1/2}_{klm} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right.$$

Die x, y, z Komponenten von E und H sind auf der Yee Einheitszelle definiert



$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

$E_{x\; k+1/2\; lm}$	$H_{x\; k\; l+1/2\; m+1/2}$
$E_{y\; k\; l+1/2\; m}$	$H_{y\; k+1/2\; l\; m+1/2}$
$E_{z\; k\; l\; m+1/2}$	$H_{z\; k+1/2\; l+1/2\; m}$