(4.7) Finite Differenzen Verfahren

Auf einem äquidistanten Gitter $\{ x_n = nh \, , \; t_m = m\tau \}$ mit Ortsgitterweite h und Zeitschrittlänge τ setzen wir $u_n^m \approx u(x_n, t_m)$ und diskretisieren (W1) durch

$$\frac{1}{\tau^2}\left(u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}\right) = c^2 \, \frac{1}{h^2}\left(u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m\right) \qquad (\Delta)$$

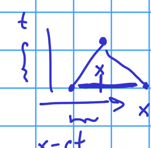
$$u_n^0 = u^0(x_n)$$

und da

$$\underset{\substack{\uparrow \\ t_1}}{u(x_n, \tau)} \overset{\substack{\text{Taylor in } t \\ \downarrow}}{=} u(x_n, 0) + \tau \, \partial_t u(x_n, 0) + \tfrac{1}{2}\tau^2 \, \partial_{tt} u(x_n, 0) + \tau^3 C$$

$$= u^0(x_n) + \tau \, v^0(x_n) + \tfrac{1}{2}\tau^2 c^2 \partial_{xx} u(x_n, 0) + \tau^3 C$$

$$u_n^1 = u_n^0 + \tau v^0(x_n) + \underbrace{\tfrac{1}{2}c^2\tau^2 \tfrac{1}{h^2}\left(u_{n-1}^0 - 2u_n^0 + u_{n+1}^0\right)}$$



Für $\sigma = \tau/h$ erhalten wir

$$u_n^{m+1} = \cancel{2\left(1 - c^2\sigma^2\right) u_n^m} + c^2\sigma^2\left(u_{n+1}^m + u_{n-1}^m\right) - u_n^{m-1} \qquad = 0 \text{ für } \sigma = 1/c$$

Das Abhängigkeitsgebiet Differenzengleichung hängt von der Schrittweitenrelation σ ab

Für $\sigma = 1/c$ (magic time step) $\tau = 1/c \, h$

ist das Abhängigkeitsgebiet des Differenzenverfahrens gleich dem der Differentialgleichung

Dann ist $u_n^{m+1} = u_{n+1}^m + u_{n-1}^m - u_n^{m-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktion}}}{=} u(t_{m+1}, x_n)$

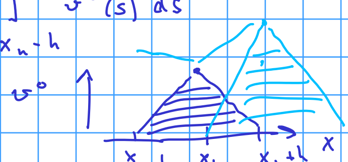
$m = 1$

$$u_n^1 = \cancel{u_n^0} + \tau v^0(x_n) + \tfrac{1}{2} u_{n-1}^0 - \cancel{u_n^0} + \tfrac{1}{2} u_{n+1}^0$$

$$= \tfrac{1}{2} u^0(x_n - c\tau) + \tfrac{1}{2} u^0(x_n + c\tau) + \underbrace{\tfrac{h}{c} v^0(x_n)}$$

$$\approx \tfrac{1}{c}\int_{x_n - h}^{x_n + h} v^0(s)\, ds$$

$m \rightsquigarrow m+1$ $\qquad \tau/h = 1/c \qquad \tau = h/c$



$$u_n^{m+1} = u_{n+1}^m + u_{n-1}^m - u_n^{m-1}$$

$$= \tfrac{1}{2} u^0(\underset{(n+1)h - mh}{\cancel{x_{n+1}} - ct_m}) + \tfrac{1}{2} u^0(\underset{(n+1)h + mh}{x_{n+1} + ct_m}) + \tfrac{1}{c}\int_{x_{n+1} - ct_m}^{x_{n+1} + ct_m} v^0(s)\, ds$$

$$+ \tfrac{1}{2} u^0(\underset{(n-1)h - mh}{x_{n-1} - ct_m}) + \tfrac{1}{2} u^0(\underset{(n-1)h + mh}{\cancel{x_{n-1}} + ct_m}) + \tfrac{1}{c}\int_{x_{n-1} - ct_m}^{x_{n-1} + ct_m} v^0(s)\, ds$$

$$- \tfrac{1}{2} u^0(\underset{nh - (m-1)h}{\cancel{x_n - ct_{m-1}}}) - \tfrac{1}{2} u^0(\underset{nh + (m-1)h}{\cancel{x_n + ct_{m-1}}}) - \tfrac{1}{c}\int_{x_n - ct_{m-1}}^{x_n + ct_{m-1}} v^0(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2} u^0 (x_n + c t_{m+1}) + \frac{1}{2} u^0 (x_n - c t_{m+1}) + \frac{1}{c} \int_{x_n - t_{m+1} c}^{x_n + t_{m+1} c} v^0(s)\, ds$$

Ist $0 < \sigma < 1/c$, so enthält das Abhängigkeitsgebiet der Differenzengleichung das der Differentialgleichung. Ist umgekehrt $\sigma > 1/c$ so ist das Abhängigkeitsgebiet der Differenzengleichung in dem der Differentialgleichung enthalten

(4.8) Satz (Courant - Friedrichs - Lewy)

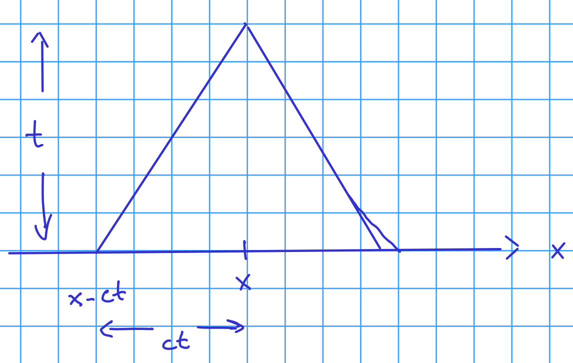
Notwendig für die Konvergenz $u_n^m \to u(x_n, t_m)$ für $h, \tau \to 0$ für beliebige Anfangsdaten ist die Schrittweitenbedingung

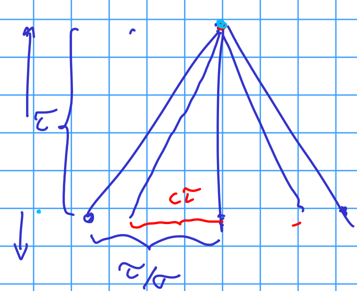
$$\boxed{\tau/h \leq 1/c} \qquad (\text{CFL-Bedingung})$$

Beweis: Sei (x_n, t_m) fest und für eine spezielle Anfangsbedingung gelte $\lim\limits_{h,\tau \to 0} u_n^m = u(x_n, t_m)$

Eine Änderung der Anfangsbedingung außerhalb des Abhängigkeitsintervall von (x_n, t_n) der Differenzengleichung also im Abhängigkeitsgebiet der DGL ändert u_n^m nicht, so dass dann u_n^m nicht gegen die veränderte Lösung konvergieren kann

17



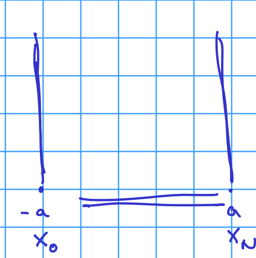


$\sigma = \tau/h \qquad h = \tau/\sigma$

$\sigma < 1/c$

$c < 1/\sigma$

(4.9) Definition / Satz



Für homogene Dirichletrandbedingungen $(u_0^m = u_{N+1}^m = 0)$ ist der räumliche Differenzenoperator

$$-\delta_x^2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad -\delta_x^2 u_n^m := -\frac{c^2}{h^2} \left(u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m \right)$$

$$u^m = \begin{pmatrix} u_1^m \\ | \\ u_N^m \end{pmatrix}$$

symmetrisch und positiv definit bzgl des Skalarprodukts

$$\langle v, w\rangle_h = h^2 \sum_{n=1}^{N} v_n w_n \qquad \| v \|_h = \left(\langle v, v \rangle_h \right)^{1/2}$$

mit h^2 bzw h skaliertes euklidisches Produkt / Norm

<u>Beweis</u> Symmetrie ✓

positiv definit nachrechnen

mit $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$-\delta_x^2 = \frac{c^2}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ vgl Numerik PDE

k-t Eigenvektor

$$w^k = \left(\sin \frac{\pi k l}{n+1} \right)_{l=1}^{n} \quad ?$$

mit Eigenwert $\lambda_k = 2 + c^2/h^2 \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$?

(4.10) <u>Satz</u> Das Differenzenverfahren (Δ) ist genau dann numerisch stabil, wenn die CFL Bedingung erfüllt ist. Ist die Lösung hinreichend glatt so gilt

$$\max_{t_m \in [0,T]} \| \underbrace{u^{(m)}}_{\begin{pmatrix} u_1^m \\ \vdots \\ u_N^m \end{pmatrix}} - \underbrace{u(\cdot, t_m)}_{\begin{pmatrix} u(x_1, t_m) \\ \vdots \\ u(x_N, t_m) \end{pmatrix}} \|_h \le c(u)\, T^2 \underbrace{(h^2 + \tau^2)}_{(\tau < 1/c \cdot h)}$$

<u>Beweis</u> 1) Die Eigenwerte der linearen Abbildung $-\delta_x^2$ erfüllen

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \quad < \lambda_N \lesssim 4\, c^2/h^2$$

mit Eigenvektoren $w^{(n)}$

$$u^{(m)} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(m)} w^{(n)}$$

Für die $\alpha_n^{(m)}$ gilt

$$\alpha_n^{(m+1)} - 2\alpha_n^{(m)} + \alpha_n^{(m-1)} + \tau^2 \lambda_n \alpha_n^{(m)} = 0 \qquad m = 1, \dots$$

Die Lösung dieser homogenen Rekursionsgleichung ist

$$\alpha_n^{(m)} = c_1 \underline{r_1}^m + c_2 \underline{r_2}^m$$ für Konstanten c_1 und c_2 mit

r_1 und r_2 Wurzeln von

$$X^2 + (\tau^2 \lambda_n - 2) X + \underline{1} = (X - r_1)(X - r_2)$$

$$r_{1,2} = \frac{2 - \tau^2\lambda_n \pm \sqrt{\underbrace{(\tau^2\lambda_n - 2)}^2 - 4}}{2} \qquad 0 < (\tau^2\lambda_n - 2) \leq 4$$

Ist $0 < \tau^2\lambda_n \leq 4$ so ist $|r_{1,2}| = 1$

$r_1 \cdot r_2 = 1$ $\qquad$ $\operatorname{Im} r_{1,2} \neq 0$ $\qquad$ $r_1 + r_2 = 2 - \tau^2\lambda_n$

$r_1 = \overline{r_2}$

und damit ist die Differenzengleichung stabil.