	Mo	Di	Mi	Do	Fr
8:30	$\boxed{\text{VL}}$!				
10:30	$\boxed{\text{Üb}}$	PDGL II	$\boxed{\text{VL}}$		Alg Komp Ang St
12:30		Kunner	Seminar		Kunner Ang St
14:30	Alg Geo		Sprachkurs		
16:30	VL				
18:30					

Numeik für Maxwellgleichungen

I Mathematische Modelle für Elektromagnetismus

Anwendungen : Elektromotoren
Transformatoren
Antennen
Glasfaserkabel
Laser
⋮

James Clerk Maxwell 1831 - 1879

"Treatsie on Electicity and Magnetism" 1873

1 Maxwellgleichungen

(1.1) Gleichungen für das magnetische Feld

- B magnetischer Fluß (Induktion) $\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
- H magnetische Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$

sind zeit- und ortsabhängige Vektorfelder

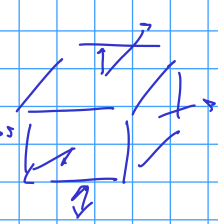
$$B : \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}^3 \\ \text{„Ort"}}}{\Omega} \times \underset{\text{‚Zeit'}}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3 \; (\mathbb{C}^3) \qquad (x,t) \mapsto B(x,t)$$

$$H : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,t) \mapsto H(x,t)$$

Die magnetische Flußdichte B ist quellfrei, der magnetische Fluß durch die Oberfläche eines Volumens ist konservativ

$$\int_{\partial V} B \cdot \nu \, ds(x) = 0$$

für jedes Volumen $V \subseteq \Omega$
(Volumen in Ort x)



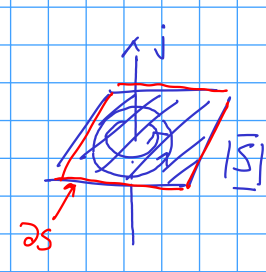
Es gibt keine magnetischen Monopole

mit ν Einheitsnormalenvektor auf ∂V (Rand von V)

Das Ampersche Gesetz beschreibt wie ein elektrischer Strom j_{tot} durch eine Fläche S ein magnetisches Feld erzeugt

j_{tot} elektrische(r) Strom (dichte) $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

j_{tot} $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



$$\int_{\partial S} H \cdot \tau \, ds(x) = \int_S j_{tot} \cdot \nu \, ds(x)$$

τ: Tangentialvektor entlang ∂S

ν: Normalenvektor auf S

Die beiden magnetischen Größen hängen über ein Materialgesetz voneinander ab

$$B = B(H)$$

In linearen Materialien gilt

$$B = \mu H$$

für die Permeabilität μ (μ ist ortsabhängig) $\left[\frac{Vs}{Am}\right]$

In linearen isotropen Materialien ist μ eine positive beschränkte reellwertige Funktion. In anisotropen Materialien ist μ eine 3×3 positiv definite Matrix

Im Allgemeinen ist der Zusammenhang $B = B(H)$ nichtlinear und hängt von der Vergangenheit ab

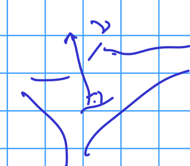
Sind die Vektorfelder hinreichend glatt erhält man mit den Sätzen von Gauß und Stokes

Gauß

$$\boxed{\int_{\partial V} B \cdot \nu \, ds} = \int_V \operatorname{div} B \, dx = \boxed{0} \quad \text{für jedes Volumen } V$$

also ist $\boxed{\operatorname{div} B = 0}$ $\qquad \operatorname{div} B = \sum_{j=1}^{3} \partial/\partial x_j \, B_j$

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} B_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ B_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ B_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} \qquad \nu(x) = \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix}$$



$$B \cdot \nu = \sum_{j=1}^{3} B_j \nu_j$$

Stokes $\qquad$ 2D Maß

und $\qquad \boxed{\int_{\partial S} H \cdot \tau \, ds} = \int_S \underline{\operatorname{curl} H \cdot \nu} \, ds$

$$\int_S j_{tot} \cdot \nu \, ds$$

für alle S

$$\operatorname{curl} H = \nabla \times H$$

Rotation

$$= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

also $\qquad \boxed{\operatorname{curl} H = j_{tot}}$

(1.2) Gleichungen für das elektrische Feld

E elektrische Feldstärke $\left[\frac{V}{m} \right]$

D elektrischer Fluß Verschiebungsstromdichte $\left[\frac{As}{m^2} \right]$

sind ebenfalls zeitabhängige Vektorfelder $\underset{\underset{\mathbb{R}^3}{\cap}}{\Omega} \times \mathbb{R} \to \underset{(\mathbb{C}^3)}{\mathbb{R}^3}$

Das Gaußsches Gesetz beschreibt das elektrische Ladungen ρ eine elektrischen Fluß (ein Verschiebungsstromstärke) D erzeugen

$$\boxed{\int_{\partial V} D \cdot \nu \, ds = \int_V \rho \, dx}$$

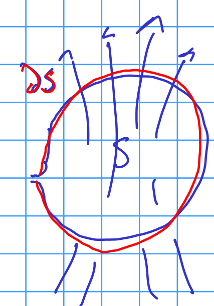
ρ Ladungsdichte $\left[\frac{As}{m^3} \right]$ $\qquad \rho : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

d.h. Der elektrische Fluß D durch den Rand eines Testvolumens V $(V \subseteq \Omega)$ ist gleich der V enthaltenen Ladung (Elektronen, Positronen, Ionen)

Das Faradaysche Induktionsgesetz beschreibt wie die zeitliche Änderung des magnetischen Flußes B elektrische Spannung erzeugt

$$\boxed{\int_S \partial/\partial t \, B \cdot \nu \, ds = - \int_{\partial S} E \cdot \tau \, ds}$$

Die induzierte Spannung in Draht (∂S) ist porportional zur Änderung des magnetischen Flußes durch die von dem Draht begrenzte Fläche S



Das Ohmsche Gesetz beschreibt dass die Stromdichte j $\left[A/m^2 \right]$ proportional zum elektrischen Feld E ist

$$j = \sigma E$$

σ : elektrische Leitfähigkeit $[As]$

Die beiden elektrischen Größen E und D hängen über ein Materialgesetz voneinander ab

$$D = \varepsilon \cdot E$$

ε Permittivität $\left[\frac{As}{Vm} \right]$

Modifikation des Ampèrschen Gesetzes durch Maxwell

Da nur zeitliche Änderungen der Verschiebungsstromdichte zu einem Strom führen setzt man

$$j_{tot} = \frac{\partial D}{\partial t} + j$$

und erhält

$$\int_{\partial S} H \cdot \tau \, ds = \int_S \partial/\partial t \, D \cdot \nu \, ds + \int_S j \cdot \nu \, ds$$

Sind die Vektorfelder hinreichend glatt so erhält man

$$\operatorname{div} D = \varrho$$

und

$$\operatorname{curl} E = -\partial_t B$$

und für das Maxwell modifizierte Ampèrsche Gesetz

$$\operatorname{curl} H = \partial/\partial t \, D + j$$

(1.3) Maxwellgleichungen (Zusammenfassung)

$$\partial_t B + \operatorname{curl} E = 0$$

$$-\partial_t D + \operatorname{curl} H = j_{tot}$$

$$\operatorname{div} B = 0$$

$$\operatorname{div} D = \varrho$$

B mag. Fluß
D elek. Fluß
H mag. Feld
E elekt. Feld

gesuchte Größen
zeitabhängige Vektorfeld

$$B = \mu H$$

$$D = \varepsilon E$$

$$j_{tot} = \sigma E + j$$

μ, ε, σ Materialparameter ort/zeit abhängig

j Strom Vektorfeld
ϱ Ladungsdichte skalare Funktion

vorgegeben
Quellterme