Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 34:

Erweitern Sie Ihr Progamm aus Aufgabe 31 um die Möglichkeit einen Strom j simulieren zu können und eine Leitfähigkeit σ zu behandeln.

Verwenden sie in Ihrem Simulation einen Strom der durch

$$j(x,y,z,t) := \begin{pmatrix} \chi_L(x,y,z)\sin(5t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei χ_L die charakteristische Funktion von L ist und der Leiter durch $L = [-2,2]\times[-0.1,0.1]\times[-0.1,0.1]$ gegeben ist.

Die weiteren Parameter sind $e^0 = h^0 = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$, $T = 10$ und $M = 79$.

Stellen Sie das Ergebnis für die beiden Fälle

- $\sigma = 0$ und
- $\sigma = 2\chi_{[-2,2]\times[-0.5,-0.4]\times[-0.5,0.5]}$

graphisch dar.

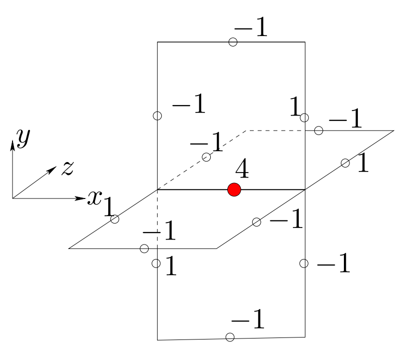
Aufgabe 35:

Wenn man in der $E - H$ Formulierung der Maxwellgleichungen formal die “Ampéresche” Gleichung nach der Zeit ableitet und für die Ableitung des h-Feldes die “Faradaysche” Gleichung einsetzt, so erhält man

$$\varepsilon\partial_t^2 E = -\operatorname{curl}\mu^{-1}\operatorname{curl} E + \sigma\partial_t E$$

Eliminierren Sie analog dazu aus dem Yee Schema das $h-$Feld und geben Sie die dadurch erhaltene Diskretisierung für obige Gleichung an.

Hinweis: Sie sollten für die x-Komponete schematisch folgenden Differenzenoperator erhalten:



Differenzenstern für den curl curl Operator für eine Kante in x-Richtung (skaliert mit h^2).

b.w.

Aufgabe 36:

Beweisen Sie, dass für die in der Vorlesung definierten Glättungsopertoren S_g^ϵ, S_c^ϵ und S_d^ϵ gilt:

(a) Für $w \in H^1(\Omega)$ gilt $\nabla S_g^\epsilon w = S_c^\epsilon \nabla w$.

(b) Für $u \in H^{\mathrm{curl}}(\Omega)$ gilt $\operatorname{curl} S_c^\epsilon u = S_d^\epsilon \operatorname{curl} u$.

(c) Für $q \in H^{\mathrm{div}}(\Omega)$ gilt $\operatorname{div} S_d^\epsilon q = S_i^\epsilon \operatorname{div} q$.

Aufgabe 37:

Sei Ω ein Lipschitzberandets Gebiet in $\mathbb{R}^3$ mit Rand Γ und ν der Normalenvektor. Definiert man für $v \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$ und $x \in \partial\Omega$

$$\gamma_{\tau,\Gamma} v(x) = v(x) \times \nu(x)$$

(Tangentialkomponente des Feldes auf dem Rand), so erhält man eine Abbildung auf $C^\infty(\bar{\Omega})^3$.

Zeigen Sie, wie in der Vorlesung für die Normalenkomponente, dass $\gamma_{\tau,\Gamma}$ zu einer stetigen linearen Abbildung $H^{\mathrm{curl}}(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)^3$ fortgesetzt werden kann.

Hinweis: Die Greensche Formel (partielle Integration) für den curl ist

$$\int_\Omega v \cdot \operatorname{curl} u \, dx - \int_\Omega \operatorname{curl} v \cdot u \, dx = \int_\Gamma (v \times \nu) \cdot u \, d\sigma(x)$$

für $u \in H^1(\Omega)^3$ und $v \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$.

Abgabe der Übungsaufgaben bis 18.06.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am 21.06.2021.