Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 28:

Modifizieren das Programm aus Aufgabe 27 so, dass Sie die Lösung der Wellengleichung auch für eine ortsabhängige Geschwindigkeit $c = c(x, y, z)$ berechnen können. Stellen Sie den Verlauf der Lösung graphisch dar. Der Funktion `wave3d` soll also eine Funktion `c` übergeben werden.

Testen Sie Ihr Programm für das Geschindigkeitsprofil $c(x, y, z) = 2 + \operatorname{sign}(x)$ und wählen Sie Anfangsdaten mit Träger in $[-a, 0] \times [-a, a] \times [-a, a]$.

Aufgabe 29:

Ermitteln Sie experimentell die CFL Bedingung für die dreidimensionale Wellengleichung aus Aufgabe 27 für ein äquidistantes Gitter `dx = dy = dz`.

Aufgabe 30:

Schreiben Sie eine Funktion `[dux,duy,duz]=dcurl(ux,uy,uz,dx,dy,dz)`, die für ein Vektorfeld $u = (ux, uy, uz)$ den diskreten curl $\leftrightarrow \tilde{\delta}_r$ auf einem Gitter mit Schrittweiten dx, dy, dz berechnet.
Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie das Vektorfeld

$$w(x, y, z) = (1 - 2x^2 \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, -2xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, -2xz\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)})^T$$

auf dem Würfel $[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$ mit unterschiedlichen Schrittweiten auswerten, darauf den diskreten curl anwenden und die Konvergenz beobachten. Was ist $\operatorname{curl} w$?

Aufgabe 31:

Schreiben Sie ein Programm, welches das Yee-Schema zur Lösung der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}
\varepsilon\partial_t e &= \operatorname{curl} h \qquad (x, y, z) \in [-2, 2]^3, t \in (0, 10) \\
\mu\partial_t h &= -\operatorname{curl} e \qquad (x, y, z) \in [-2, 2]^3, t \in (0, 10) \\
e(x, y, z, 0) &= (-2(2y^2 - 1)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, 4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, 0) \\
h(x, y, z, 0) &= (-4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, -2(2y^2 - 1)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, 4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}) \\
t \cdot e(x, y, z, t) &= 0 \qquad (x, y, z) \in \partial([-2, 2]^3), t \in (0, 10)
\end{aligned}$$

implementiert. Hierbei ist t, ein Tangentialvektor auf dem Rand des Würfels. Verwenden Sie die Funktion aus Aufgabe 30 für die Berechnung von $\tilde{\delta}_r h^n_{m,k,l}$, bzw $\tilde{\delta}_r e^{n+1/2}_{m,k,l}$. Die Materialparameter sind $\varepsilon = \mu = 1$. Die Ortsschrittweite ist $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.05$. Wählen Sie die Zeitschrittweite geeignet und stellen Sie die Lösung graphisch dar.

Aufgabe 32:

Sei $\mathcal{S}_N$, der in der Vorlesung definierte Funktionenraum. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen in diesem Raum definiert durch $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, ..., N$ eine Basis ist.

Aufgabe 33:

Seien u die exakte Lösung und u_s die Galerkinlösung. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\|u - u_s\|_{L^2} \leq Ch\|u - u_s\|_a \leq 2(Ch)^2\|u''\|_{L^2}$$

Abgabe der Übungsaufgaben bis 11.06.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am 14.06.2021.