Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 20:

Zeigen Sie, dass $\lambda_m = 4\sin^2(\frac{m\pi}{2M})$, $m = 1, ..., M-1$ und $(v^m)_j = \sin(\frac{jm\pi}{M})$, $m, j = 1, ..., M-1$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der folgenden $M-1 \times M-1$ Matrix sind

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 21:

Schreiben Sie ein Python- oder Matlab-Programm, welches die Lösung folgender Gleichung mit Hilfe der finiten Differenzen Methode der Vorlesung berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\partial_{tt}u = \partial_{xx}u - k^2 u \qquad & x \in (-a, a),\ t \in (0, T) \\ u(\pm a, t) = 0 \qquad & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u^0(x) \qquad & x \in (-a, a) \\ \partial_t u(x, t)|_{t=0} = v^0(x) \qquad & x \in (-a, a) \end{aligned}$$

Schreiben Sie dazu eine Funktion `udd = diff2D(u,dx)`, welche für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^{M+2}$ die Anwendung der linearen Abbildung δ_x^2, mit Schrittweite `dx` implementiert.

Schreiben Sie weiter eine Funktion `u = wave1d(x,c,u,v,dt,t,tend,k)` , welche für

- das Gitter $\mathtt{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{M+1})$, mit $x_0 = -\mathtt{a}$ und $x_{M+1} = \mathtt{a}$,
- die Geschwindigkeit c,
- die Funktion der Anfangswerte `u`,
- die Funktion der Anfangsgeschwindigkeiten `v`,
- die Zeitschrittweite `dt`

auf dem Zeitintervall $[\mathtt{t}, \mathtt{tend}]$, die Lösung `u` an der Stelle `tend` berechnet.

Testen Sie Ihr Programm mit $a = 2$, $M = 39$, $T = 10$, $v^0(x) = 0$ und sowohl für

$$u^0(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$$

als auch für

$$u^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

und für $k = 0$ und $k = 2$ mit einer geeigneten Schrittweite `dt`.

b.w

Aufgabe 22:

Aus der Lösungsformel II der Vorlesung können Sie für $v^0 = 0$ und $k = 0$ für die Gleichung aus Aufgabe 21 eine Formel für die exakte Lösung herleiten.

Erweitern Sie die Funktion aus Aufgabe 21 zu einer Funktion
`[u,error] = wave1d(x,c,u,v,dt,t,tend,k,a,uexact)`, der Sie zusätzlich eine Funktion `uexact` zur Berechnung der exakten Lösung übergeben können und die auch den Fehler an der Stelle $t =$ `tend` berechnet.

Welche Konvergenz des Fehlers bei Verfeinerung der Zeitschrittweite beobachten Sie?

Aufgabe 23:

Seien Ω_1 und Ω_2 zwei offenen Mengen in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \emptyset$ und $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \Gamma \neq \emptyset$ für eine glatte Fläche Γ, sodass $\mu(x) = \mu_1$, $\epsilon(x) = \epsilon_1$ auf Ω_1 und $\mu(x) = \mu_2$, $\epsilon(x) = \epsilon_2$ auf Ω_2.

Zeigen Sie, dass aus $\operatorname{div} b = 0$ die Stetigkeit der Normalenkomponenten von b folgt, d.h.

$$\lim_{x_1 \to x} b(x_1) \cdot \nu - \lim_{x_2 \to x} b(x_2) \cdot \nu = 0$$

für $x \in \Gamma$ und einen Normalenvektor ν auf Γ in x.

Die Übungsblätter gibt es nach Pfingsten immer am Mittwoch. Abgabe ist dann 9 Tage später jeweils am Freitag.

Abgabe der Übungsaufgaben bis 28.05.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am 31.05.2021.