MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 12: Sei ω eine n-Form auf $V \subset \mathbb{R}^n$ mit der Koordinatendarstellung $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ und $\varphi : U \to V$ eine C^1 invertierbare Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\varphi^*\omega = f \circ \varphi \,\det(D_\varphi)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

gilt.

Aufgabe 13: Zeichnen Sie die folgenden Funktionen, Vektorfelder und deren äussere Ableitungen:

(a) $v(x,y,z) = (x/r, y/r, z/r)$, mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (kartesische Koordinaten auf dem Würfel $[-1,1]^3$).

(b) $w(x,y,z) = (2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}y, -2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}(x+z), 2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}y)$ (kartesische Koordinaten auf dem Würfel $[-1,1]^3$).

(c) $f(r,\phi,h) = r^{2/3}\sin(\frac{2}{3}\phi)$ (Zylinderkoordinaten auf einer 3/4-Torte).

Aufgabe 14:

Sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\omega = 3z\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (x^2+y^2)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z - xy = 0\}$ so orientiert, dass $e_3 = (0,0,1)$ ein positiv orientierter Normalenvektor von M in $(0,0,0)$ ist. Berechnen Sie

$$\int_A \omega$$

für $A := \{(x,y,z) \in M \,|\, |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Aufgabe 15:

Zeigen Sie, dass

$$\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

eine geschlossene Differentialform, aber keine exakte Differentialform auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist.

Abgabe der Übungsaufgaben bis 10.05.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.