Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 4:

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Es gilt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma f \cdot d\vec{s} = \int_\gamma < f, \tau > ds$$

Aufgabe 5:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass für das Differential $\mathrm{d}\omega$ einer $(n-1)$ Form ω mit

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_i \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \hat{\mathrm{dx_j}} \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

gilt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Aufgabe 6:

In $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ seien die Koordinaten x_1, x_2, x_3 und t. Man setzt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{s} &:= (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3) \\ \mathrm{d}\vec{S} &:= (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \\ \mathrm{d}V &:= \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass sich Differentialformen der Ordnung $0, 1, 2, 3, 4$ auf $\mathbb{R}^4$, schreiben lassen als,

$$\omega_0 = f, \quad \omega_1 = a \cdot \mathrm{d}\vec{s} + f\mathrm{d}t, \quad \omega_2 = a \cdot \mathrm{d}\vec{s} \wedge \mathrm{d}t + b \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$
$$\omega_3 = a \cdot \mathrm{d}\vec{S} \wedge \mathrm{d}t + f\mathrm{d}V, \text{ und } \omega_4 = f \cdot \mathrm{d}V \wedge \mathrm{d}t.$$

mit zeitabhängigen Vektorfeldern $a, b : U \to \mathbb{R}^3$ und zeitabhängigen Skalarenfeldern $f : U \to \mathbb{R}$. ($U \subset \mathbb{R}^4$ offen)

Aufgabe 7:

In $\mathbb{R}^3$ (Koordinaten x, y, z) sei die 2 Form

$$\omega = 2xz\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - (z^2 + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt und bestimmen Sie die Stammfunktion.

Abgabe der Übungsaufgaben bis 26.04.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.