Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 13. Übungsblatt

Aufgabe 51:

Seien $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, d+1$, die baryzentrischen Koordinaten des Punktes x bezüglich der Eckpunkte v_j eines Simplex.

Machen Sie sich klar, dass für die zur Kante $e_\alpha = (v_i, v_j)$ des Simplex gehörige Funktion

$$\phi_\alpha^E := \nabla \lambda_{v_i} \lambda_{v_j} - \lambda_{v_i} \nabla \lambda_{v_j}$$

für Kanten e_α und e_β gilt

$$\phi_\alpha^E \cdot \tau|_{e_\beta} = \frac{1}{|e_\beta|} \delta_{\alpha\beta}.$$

Hierbei ist $|e_\beta|$ die Länge der Kante e_β und τ der Einheitstangentialvektor zur Kante e_β.

Aufgabe 52:

In Numerik 1 wurden Legendrepolynome ℓ_j, $j = 0, \dots$ eingeführt. Diese hatten Grad j, waren orthogonal bezüglich des $L^2([-1, 1])$ Skalarprodukts, d.h.

$$\int_{-1}^{1} \ell_j(x) \ell_i(x) dx = \frac{2}{2j+1} \delta_{ij}$$

und können durch eine Dreitermrekursion berechnet werden:

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= 1, \\ \ell_1(x) &= x, \\ (n+1)\ell_{n+1}(x) &= (2n+1)x\ell_n(x) - n\ell_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Nun definiert man für $n \geq 2$ integrierte Legendrepolynome L_j auf $[-1, 1]$ durch

$$L_n(x) = \int_{-1}^{x} \ell_{n-1}(\xi) d\xi.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese orthogonal bezüglich des Produkts sind, das auf die H^1 Seminorm führt, d.h. $\int_{-1}^{1} L_i' L_j' = C\delta_{ij}$.

(b) Geben Sie eine Dreitermrekursion zur Berechnung der L_j, wenn man mit $L_1(x) = x$ initialisiert.

Aufgabe 53:

Stellen Sie ein paar der nodalen Basisfunktionen zu den curl konformen finiten Elementen aus Definition (10.18) und (10.19) graphisch dar.

Das können Sie mit Bleistift und Papier, mit Matplotlib, Matlab oder Maple oder auch mit ngsolve machen. Siehe dazu: `https://ngsolve.org/docu/release/i-tutorials/unit-2.3-hcurlhdiv/hcurlhdiv.html`.

Aufgabe 54: (Bonusaufgabe)

Schauen Sie sich das Ipyton notebook zu

`https://ngsolve.org/docu/release/i-tutorials/unit-2.4-Maxwell/Maxwell.html`

an.

Die ipynb Datei können Sie hier runterladen:
`https://ngsolve.org/docu/jupyter-files/unit-2.4-Maxwell/Maxwell.ipynb`

Aufgabe 55:

Sei $\Phi_K : \hat{x} \mapsto x := B_K\hat{x} + b_K$ eine Abbildung, die den Tetraeder $\hat{K}$ auf den Tetraeder K abbildet.

Zeigen Sie:

Falls $\hat{u} \in (\mathbb{P}^k(\hat{K}))^3 \oplus \{p \in (\tilde{\mathbb{P}}^{k+1}(\hat{K}))^3 \ : \ x \cdot p = 0\}$ so ist

$$u := B_K^{-T}\hat{u} \circ \Phi_K^{-1}$$

in $(\mathbb{P}^k(K))^3 \oplus \{p \in (\tilde{\mathbb{P}}^{k+1}(K))^3 \ : \ x \cdot p = 0\}$.

Der Funktionenraum der Nédélec Elemente ist also invariant unter der angegeben Transformation.

Abgabe der Übungsaufgaben bis 16.07.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am 19.07.2021.