Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

30.06.2021

Numerik für Maxwellgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 46:

Seien vier Punkte v_1, v_2, v_3 und v_4 in $\mathbb{R}^3$ in allgemeiner Lage gegeben, d.h. die Determinante der Matrix $[v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1]$ ist ungleich Null. Die Punkte v_1, v_2, v_3 und v_4 sind dann die Eckpunkte eines nichtdegenerierten Tetraeders.

Durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 1$ wird eindeutig ein Punkt v, das Baryzentrum der v_j für die Gewichte λ_j, via

$$v - v_0 = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j (v_j - v_0)$$

definiert, wobei v_0 der Ursprung ist. Die $\lambda_j(v)$ sind dann affin lineare Funktionen.

Berechnen Sie den Mittelwert von λ_n

(a) entlang einer Kante,

(b) über eine Seitenflfläche und

(c) das Tetrader,

wobei diese jeweils den Punkt v_n enthalten.

Aufgabe 47:

Zeigen Sie, dass für ein nichtdegeneriertes Tetraeder die $\lambda_j(x)$ aus Aufgabe 46 linear unabhängig sind.

Aufgabe 48:

Ein regulärer Tetraeder ist ein Tetrader dessen Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Kann man den $\mathbb{R}^3$ mit einem regulären Tetraeder parkettieren?

Aufgabe 49:

(Aufgabe aus Numerik IV)

Sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall. Die Vorschrift $u \mapsto \omega_I(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Funktional ω_I auf $L^1(I)$. Wie üblich sei δ_x die Punktauswertung an der Stelle x (definiert für stetige Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $(I, \mathbb{P}_2(I), \Sigma)$ ein finites Element ist, falls $\Sigma = \{\delta_a,\, \delta_b,\, \omega_I\}$. Bestimmen Sie die zu Σ duale Basis von $\mathbb{P}_2(I)$.

(b) Der zu Teil (a) gehörige globale Finite-Elemente-Raum enthält nur stetige Funktionen. Wieso lässt sich diese Konstruktion nicht auf Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ übertragen?

(c) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{\delta_a,\, \omega_I\}$. Zeigen Sie, dass $\left(I, \mathbb{P}_1(I), \widetilde{\Sigma}\right)$ ein Finites Element ist. Wieso ist das Tripel $\left(I, \mathbb{P}_1(I), \widetilde{\widetilde{\Sigma}}\right)$ mit $\widetilde{\widetilde{\Sigma}} = \{\delta_{(a+b)/2},\, \omega_I\}$ kein Finites Element?

(d) Seien nun $\hat{I} = [0, 1]$ und $\widehat{\Sigma} = \{\omega_{[0,2/3]},\, \omega_{[1/3,1]}\}$. Ist $\left(\hat{I}, \mathbb{P}_1(\hat{I}), \widehat{\Sigma}\right)$ ein Finites Element?

Aufgabe 50:

Für $n \geq 1$ sei

$$\Delta^n := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum\nolimits_i x_i \leq 1\right\}$$

das n-dimensionale Einheitssimplex. Wir betrachten Mengen von Teilsimplizes, d. h.

$$\mathcal{T}(\Delta^n) = \{T \subset \Delta^n \mid \text{jedes } T \text{ ist ein } n\text{-dimensionales Simplex}\}.$$

Wir nennen ein solches $\mathcal{T}(\Delta^n)$ Verfeinerung von Δ^n, falls

(i) $\mathring{T}_1 \cap \mathring{T}_2 = \emptyset$ für $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\Delta^n)$, $T_1 \neq T_2$,

(ii) $\Delta^n = \bigcup_{T \in \mathcal{T}(\Delta^n)} T$ und

(iii) jeder Eckpunkt eines Teilsimplizes mit einem Eckpunkt oder einem Kantenmittelpunkt von Δ^n übereinstimmt.

Nun kommt die eigentliche Aufgabe.

(a) Sei $\mathcal{T}(\Delta^n)$ Verfeinerung von Δ^n. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{T}(\Delta^n)| \leq 2^n$.
Hinweis: Das Volumen von Δ^n ist $\frac{1}{n!}$.

(b) Finden Sie eine Verfeinerung $\mathcal{T}(\Delta^3)$ des Tetraeders Δ^3 mit $\left|\mathcal{T}(\Delta^3)\right| = 8$. Sind die Tetraeder in dieser Zerlegung kongruent?

Abgabe der Übungsaufgaben bis 09.07.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am 12.07.2021.