MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerik für Maxwellgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 42:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Lispschitzberandetes Gebiet.

Für eine Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto v(x_1, x_2)$ definiert man die Vektorrotation durch $\vec{\operatorname{curl}}\, v = (\frac{\partial}{\partial x_2} v, -\frac{\partial}{\partial x_1} v)^T$

Zeigen Sie, dass für $u \in H^{\operatorname{div}}(\Omega)$ mit $\operatorname{div} u = 0$ und $\gamma_{n,\partial\Omega} u = 0$ ein $\psi \in H^1(\Omega)$ existiert, so dass

$$\vec{\operatorname{curl}}\, \psi = u$$

gilt.

Aufgabe 43:

Implementieren Sie das Verfahren aus Aufgabe 35. Wählen Sie als Rechengebiet den Würfel $[-2, 2]^3$ und setzen Sie $\mu = \varepsilon = 1$ und $\sigma = 0$. Verwenden Sie als Randbedingung, dass die Tangeltialkomponenten des E-Feldes am Rand Null sind und als Anfangswert

$$E(x, y, z, 0) = (-yz)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, xz\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, 0)$$

$$\partial_t E(x, y, z, 0) = (x(2z^2 - 1)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, y(2z^2 - 1)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}, -2(x^2 + y^2 - 1)z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)})$$

Aufgabe 44:

Für ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) \mapsto \binom{v_1(x_1,x_2)}{v_2(x_1,x_2)}$ definiert man die skalare Rotation durch

$$\operatorname{curl} v := \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1.$$

Für ein Lipschitzgebiet $\hat{K} \subset \mathbb{R}^2$ sei $\Phi : \hat{K} \to K \subset \mathbb{R}^2$ $\hat{x} \mapsto x = \Phi(\hat{x})$ ein Diffeomorphismus, F die Jacobimatrix von Φ und $J = \det(F)$.

Zeigen Sie, dass für $\hat{u} \in H^{\operatorname{curl}}(\hat{K})$ die skalare Rotation des Vektorfeld

$$u := F^{-T} \hat{u} \circ \Phi^{-1}$$

durch

$$\operatorname{curl}_x u = J^{-1} \operatorname{curl}_{\hat{x}} \hat{u} \circ \Phi^{-1}$$

gegeben ist.

Man kann sogar zeigen, dass $u \in H^{\operatorname{curl}}(K)$ gilt.

Aufgabe 45:

Für ein Gebiet $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ sei $\Phi : \hat{K} \to K \subset \mathbb{R}^d$ $\hat{x} \mapsto x = \Phi(\hat{x})$ ein Diffeomorphismus, F ihre Jacobimatrix und $J = \det(F)$.

Es sei $d = 2, 3$. Zeigen Sie für $\hat{x} \in \partial\hat{K}$ und $x = \Phi(\hat{x}) \in \partial K$:

(a) Ist $\hat{\nu}(\hat{x})$ ein Einheitsnormalenvektor von $\hat{K}$, so ist $\nu(x) = \frac{F^{-T}(\hat{x}\hat{\nu}(\hat{x})}{\|F^{-T}(\hat{x})\hat{\nu}(\hat{x})\|_2}$ ein Einheitsnormalenvektor von K.

(b) Ist $\hat{\tau}$ ein Tangentialvektor von $\hat{K}$, so ist $\tau(x) = \frac{F(\hat{x})\hat{\tau}(\hat{x})}{\|F(\hat{x}\hat{\tau}(\hat{x})\|_2}$ ein Tangentialvektor von K.

Hinweis: Die Aussage gilt für beliebige Dimensionen d.

Abgabe der Übungsaufgaben bis 02.07.2021, 8:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am 05.07.2021.