Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Achim Schädle, Marina Fischer

- Vorlesung: Mittwoch + Donnerstag 8:30-10:00 Uhr
- Übung: Mittwoch 10:30-12:00 Uhr

→ Homepage `http://www.am.uni-duesseldorf.de/~schaedle/lehre/so2020/numerikIII/`

1 Einführung

1 Einführung

1.1 Populationsdynamik

Beispiel 1.1 (Exponentielles Wachstum)

- $y(t)$: Populationsgröße zur Zeit t
- Model : Veränderung der Populationsgröße $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ ist proportional zur Populationsgröße

d.h.

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t)$$
$$y(t_0) = y_0$$

- $\alpha > 0$ Vermehrungsrate
- t_0 Anfangszeitpunkt
- y_0 Anfangswert

Lösung: $y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\alpha} y_0$
exponentielles Wachstum

Beispiel 1.2 (Räuber Beute Modell (Volterra 1920))

Die Anzahl $y(t)$ von Speisefischen zur Zeit t und
die Anzahl $z(t)$ von Raubfischen kann mit Hilfe des Populationsmodells

$$
\begin{aligned}
y' &= ay - byz, \\
z' &= -cz + dyz
\end{aligned}
$$

berechnet werden.
Hierbei ist a die Geburtenrate der Speisefische,
b Effizienz der Raubfische,
c die Sterberate der Raubfische,
d nahrungsabhängige Geburtenrate der Raubfische

1.2 Chemische Reaktionskinetik

Beispiel 1.3

Hier möchte man den Verlauf chemischer Reaktionen simulieren. Weiß man etwa, dass die Substanzen A, B, C gemäß

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{k_1} B \\ B + C &\xrightarrow{k_2} A + C \\ B + B &\xrightarrow{k_3} B + C \end{aligned}$$

mit Reaktionskonstanten k_1, k_2, k_3 reagieren,
dann liefert das Massenwirkungsgesetz für die Konzentrationen $a(t), b(t), c(t)$ der Substanzen A, B, C zur Zeit t

$$\begin{aligned} a' &= -k_1 a + k_2 bc, \\ b' &= k_1 a - k_2 bc - k_3 b^2, \\ c' &= k_3 b^2. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen Anfangskonzentrationen $a(0), b(0)$ und $c(0)$ gegeben sein.

Beispiel 1.4

$\to$ **ÜA**

1.3 Newtonsche Mechanik

Betrachte Massepunkt mit Masse m und Postion $q(t) \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit t. Seine Geschwindigkeit $v(t) = \dot{q}(t)$ ist die zeitliche Ableitung der Postion q.
Newtonsche Gesetze

1. Trägheitssatz: Wirkt auf einen Körper keine Kraft $F \in \mathbb{R}^3$, so ist seine Geschwindigkeit konstant.
$$F = 0 \rightarrow \dot{v}(t) = 0$$
2. Die Änderung der Geschwindigkeit (Beschleunigung) ist proportional zur einwirkenden Kraft
$$m\dot{v}(t) = m\ddot{q}(t) = F$$
3. Action gleich Reactio
$$\text{Kraft} = \text{Gegenkraft}$$

Beispiel 1.5 (Pendel)

Beispiel 1.5 (Pendel)

$$ms''(t) = -mg\sin(\phi(t))\ , \quad s(t) = l\phi(t)$$

$$\phi''(t) = -\frac{g}{l}\sin(\phi(t))$$

$$y(t) := \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix} \quad y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi'(t) \\ -\frac{g}{l}\sin(\phi(t)) \end{pmatrix}}_{f(t,y(t))}$$

- $\phi(t)$ Winkel zur Zeit t, $s(t)$ Position zur Zeit t
- l Länge des Pendels, m Masse, g Erdbeschleunigung

Beispiel 1.6 (Keplerproblem)

Gravitationspotential $U = -G \frac{m_1 m_2}{\|q_1 - q_2\|_2}$

$$F_{12} = -\nabla_{q_1} U =$$

Gravitationskraft:

$$F_{21} = -\nabla_{q_2} U =$$

Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 &= -\nabla_{q_1} U(q_1, q_2) \\ m_2 \ddot{q}_2 &= -\nabla_{q_2} U(q_1, q_2) \end{aligned}$$

2 Theorie gewöhnlicher DGL

Definition 2.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $(t_0, y_0) \in \Omega$ dann heißt

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

Anfangswertproblem (AWP),
t_0 ist der Anfangszeitpunkt und y_0 der Anfangswert.
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ so heißt eine stetig differenzierbare Kurve

$$y : I \to \mathbb{R}^d : t \mapsto y(t)$$

Lösung des Anfangswertproblems (AWPs), falls

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I$$

und $y(t_0) = y_0$

Bemerkung 2.2

Jede Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$y^{(k)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)}).$$

kann in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden:
Mit der Setzung

$$\begin{aligned} y_1 &= y & y_1' &= y_2 \\ y_2 &= y' & y_2' &= y_3 \\ &\vdots & &\vdots \\ y_{k-1} &= y^{(k-2)} & y_{k-1}' &= y_k \\ y_k &= y^{(k-1)} & y_k' &= f(t, y_1, \ldots, y_k) \end{aligned}$$

erhält man für $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$ *das System*

$$Y' = F(t, Y),$$

wenn man

$$F(t, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \\ f(t, y_1) \end{bmatrix}$$

setzt.

Definition 2.3

Hängt die rechte Seite f nicht explizit von t ab, so heißt die Differentialgleichung autonom.

Jede nichtautonome DGL

$$y' = f(t, y)\ , \quad y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu einem autonomen System

$$Y' = F(Y) \text{ mit } Y = \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} \text{ und } F(Y) = \begin{bmatrix} f(t, y) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 2.4

Eine stetig Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt lokal Lipschitzstetig in der zweiten Komponenten, falls für $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt eine Konstante L (Lipschitzkonstante) existiert so, dass

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L\,\|y - z\| \qquad \forall (t,y),(t,z) \in K. \tag{1}$$

Die lokale Lipschitz-Bedingung (1) ist erfüllt, falls f stetig differenzierbar ist und zwar mit $L = \max_{(t,y)\in K}\{\|f_y(t,y)\|\}$.

Satz 2.5 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall
$f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitzstetig. Dann gibt es zu $y_0 \in U$ und $t_0 \in I$ ein $\delta > 0$ und eine auf $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $y : I_\delta \to \mathbb{R}^d$ so, dass

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{für } t \in I \qquad \text{und} \qquad y(t_0) = y_0.$$

gilt und insbesondere y auf I_δ differenzierbar ist.
Die Lösung kann bis an den Rand von U fortgesetzt werden, d.h. für alle $K \subset U$ kompakt mit $(t_0, y_0) \in K$ existiert ein $t_1 > t_0$ so, dass die Lösung des Anfangswertproblems auf $[t_0, t_1]$ existiert mit $(t_1, y(t_1)) \notin K$.

Satz 2.5 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall
$f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitzstetig. Dann gibt es zu $y_0 \in U$ und $t_0 \in I$ ein $\delta > 0$ und eine auf $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $y : I_\delta \to \mathbb{R}^d$ so, dass

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{für } t \in I \qquad \text{und} \qquad y(t_0) = y_0.$$

gilt und insbesondere y auf I_δ differenzierbar ist.
Die Lösung kann bis an den Rand von U fortgesetzt werden, d.h. für alle $K \subset U$ kompakt mit $(t_0, y_0) \in K$ existiert ein $t_1 > t_0$ so, dass die Lösung des Anfangswertproblems auf $[t_0, t_1]$ existiert mit $(t_1, y(t_1)) \notin K$.

Beweis.

Idee: Picardoperator: $y \mapsto Ty$ $(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$
T ist Kontraktion
Banachscher Fixpunktsatz
Fixpunkt ist Lösung (Details Ana II) $\square$

Beispiel 2.6

1. Blow-up

$$\dot{y} = y^2, \qquad y(0) = 1, \qquad U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

   $f(y) = y^2$ ist stetig diffbar und damit lokal Lipschitz-stetig, erfüllt also die Voraussetzungen von Picard Lindelöf (Satz 2.5).

Beispiel 2.6

1. Blow-up
$$\dot{y} = y^2, \qquad y(0) = 1, \qquad U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
$f(y) = y^2$ ist stetig diffbar und damit lokal Lipschitz-stetig, erfüllt also die Voraussetzungen von Picard Lindelöf (Satz 2.5).
Die eindeutige Lösung $y(t) = (1-t)^{-1}$ existiert auf dem offenen Intervall $I = (-\infty, 1)$ und $t_0 = 0 \in I$.
Es ist $\lim_{t \nearrow 1} y(t) = +\infty$.
2. Kollaps am Rand

Lemma 2.7 (Gronwall 1877-1932)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall,* $u : I \to \mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_+ = \{x \in R : x > 0\})$ *setig so, dass für* $\alpha, \beta > 0$, $t_0 \in I$ *und alle* $t \in I$ *mit* $t \geq t_0$

$$u(t) < \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(s) ds$$

gilt. Dann ist

$$u(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}$$

Beweis:

Für numerische Verfahren ist es wichtig, wie sich Störungen der Anfangswerte auf die Lösung auswirken.

Satz 2.8

Definition 2.9 (Evolution)

Sind die Voraussetzungen von Satz 2.5 für $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit Anfangsdaten (t_0, y_0) erfüllt und sei $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ die eindeutige maximale Lösung auf $I \subseteq \mathbb{R}$ für das maximale Existenzintervall $I = I(t_0, y_0)$ dann heißt die Abbildung

$$\Phi^{t,t_0} : y_0 \mapsto y(t) = y(t; t_0, y_0)$$

Evolution der Differentialgleichung

Lemma 2.10

Definition 2.11 (Fluß)

Lemma 2.12

Definition 2.13 (Kondition von AWPen)

Satz 2.14 (Differenzierbarkeit der Evolution)

Definition/Lemma 2.15 (Variationsgleichung)

Beispiel 2.16

Definition 2.17 (Propagationsmatrix)

Lemma 2.18

Definition 2.19 (Kondition)

Bemerkung 2.20

Lemma 2.21

3 Runge-Kutta Verfahren

Ziel:

Euler-Verfahren


Bild aus Wikipedia

Einfachstes und ältestes Verfahren zur näherungsweisen Lösung von

$$y'(t) = f(t, y(t)); \quad y(t_0) = y_0$$

Idee: Ersetze lokal die (unbekannte) Lösung durch die bekannte Tangente an der Stelle t_0

Euler-Verfahren


Bild aus Wikipedia

Einfachstes und ältestes Verfahren zur näherungsweisen Lösung von

$$y'(t) = f(t, y(t)); \quad y(t_0) = y_0$$

Idee: Ersetze lokal die (unbekannte) Lösung durch die bekannte Tangente an der Stelle t_0 so erhält man $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$, usw.

Euler-Verfahren

Bild aus Wikipedia

Einfachstes und ältestes Verfahren zur näherungsweisen Lösung von

$$y'(t) = f(t, y(t)); \quad y(t_0) = y_0$$

Idee: Ersetze lokal die (unbekannte) Lösung durch die bekannte Tangente an der Stelle t_0 so erhält man $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$, usw.
Allgemeine Iterationsvorschrift:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad t_n = t_0 + nh$$

explizites Euler-Verfahren

Euler-Verfahren

Ersetzt man lokal die (unbekannte) Lösung durch die Tangente an der ebenfalls noch unbekannten Stelle t_1, y_1

Euler-Verfahren

Ersetzt man lokal die (unbekannte) Lösung durch die Tangente an der ebenfalls noch unbekannten Stelle t_1, y_1 so erhält man
$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1)$, usw.

Euler-Verfahren

Ersetzt man lokal die (unbekannte) Lösung durch die Tangente an der ebenfalls noch unbekannten Stelle t_1, y_1 so erhält man
$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1)$, usw.
Allgemeine Iterationsvorschrift:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad t_n = t_0 + nh$$

implizites Euler-Verfahren

Euler-Verfahren

Ersetzt man lokal die (unbekannte) Lösung durch die Tangente an der ebenfalls noch unbekannten Stelle t_1, y_1 so erhält man
$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1)$, usw.
Allgemeine Iterationsvorschrift:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad t_n = t_0 + nh$$

implizites Euler-Verfahren

Hierbei muss in jedem Schritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. (etwa mit Newton-Verfahren oder Fixpunktiteration)

Approximationsfehler beim expl. Eulerverfahren

Sei $I = [t_0, T]$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und (global) Lipschitz-stetig, d.h.

$$||f(t, y) - f(t, z)|| \leq L||y - z|| \qquad \forall y, z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in I, \tag{2}$$

Ist $y : I \to \mathbb{R}^d$ Lösung von des AWPs $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$, dann ist y jetzt zweimal stetig differenzierbar, denn

$$y'' = \partial_t f + D_y f \cdot y' = \partial_t f + D_y f \cdot f.$$

$D_y f = D_y f(t, y)$ bezeichnet die Ableitung ($d \times d$ Matrix) nach y.
Die Folge $(y_n)_n$ ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit $t_n = t_0 + nh \in I$ durch das explizite Euler-Verfahren definiert.

Satz 3.1 (Fehlerabschätzung für das explizite Eulerverfahren)

Mit den eben gemachten Voraussetzungen gilt für den Fehler des expliziten Euler-Verfahrens

$$\|y_n - y(t_n)\| \leq Mh,$$

mit

$$M = \frac{\mathrm{e}^{L(T-t_0)} - 1}{L} \frac{1}{2} \max_{t \in I} \|y''(t)\|.$$

Satz 3.1 (Fehlerabschätzung für das explizite Eulerverfahren)

Mit den eben gemachten Voraussetzungen gilt für den Fehler des expliziten Euler-Verfahrens

$$\|y_n - y(t_n)\| \leq Mh,$$

mit

$$M = \frac{\mathrm{e}^{L(T-t_0)} - 1}{L} \frac{1}{2} \max_{t \in I} \|y''(t)\|.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{h \to 0} \max_{n: t_n \in I} \|y_n - y(t_n)\| = 0,$$

d.h. die Näherungslösung konvergiert gleichmäßig gegen die exakte Lösung der Anfangswertaufgabe, falls h *gegen Null geht.*

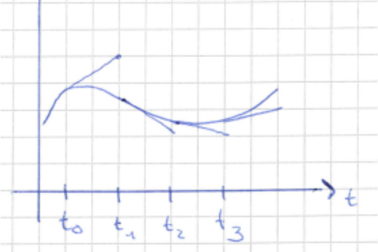
Beweis von Satz 3.1

in 3 Schritten

1. Abschätzung für den lokalen Fehler
2. Fehlerfortpflanzung
3. Fehlerakkumulation

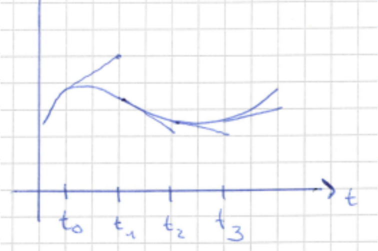
lokaler Fehler

Fehler nach einem Schritt des Verfahrens mit Startwert auf der exakten Lösung



lokaler Fehler

Fehler nach einem Schritt des Verfahrens mit Startwert auf der exakten Lösung

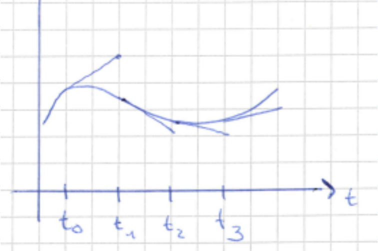


$$\underbrace{y(t_{n+1})}_{\text{exakte Lsg. bei } t_{n+1}} - \underbrace{(y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))}_{\text{expl. Eulerverfahren mit Startwert } y(t_n)}$$

$\Rightarrow \|y(t_{n+1}) - (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))\| \leq Ch^2$
für $C = \frac{1}{2} \max_{t \in I} \|y''(t)\|$.

lokaler Fehler

Fehler nach einem Schritt des Verfahrens mit Startwert auf der exakten Lösung



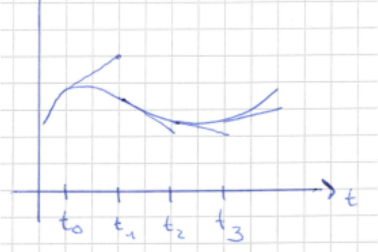
$$\underbrace{y(t_{n+1})}_{\text{exakte Lsg. bei } t_{n+1}} - \underbrace{(y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))}_{\text{expl. Eulerverfahren mit Startwert } y(t_n)} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n)$$

.

$\Rightarrow \|y(t_{n+1}) - (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))\| \leq Ch^2$
für $C = \frac{1}{2} \max_{t \in I} \|y''(t)\|$.

lokaler Fehler

Fehler nach einem Schritt des Verfahrens mit Startwert auf der exakten Lösung



$$\underbrace{y(t_{n+1})}_{\substack{\text{exakte Lsg.}\\ \text{bei } t_{n+1}}} - \underbrace{(y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))}_{\substack{\text{expl. Eulerverfahren mit}\\ \text{Startwert } y(t_n)}} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n)$$

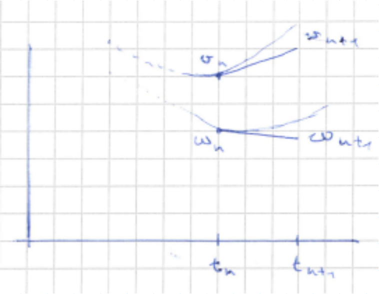
$$\underset{\substack{\text{Taylorentwicklung von}\\ y(t_{n+1}) \text{ um } t_n}}{=} h^2 \int_0^1 (1-\theta) y''(t_n + \theta h) d\theta.$$

$\Rightarrow \|y(t_{n+1}) - (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))\| \leq Ch^2$
für $C = \frac{1}{2} \max_{t \in I} \|y''(t)\|$.

Fehlerfortpflanzung

Ausgehend von Anfangswerten v_n bzw. w_n ergeben sich durch einen Eulerschritt die Näherungen

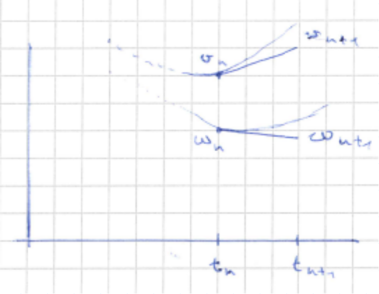
$$v_{n+1} = v_n + hf(t_n, v_n),$$
$$w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n).$$



Fehlerfortpflanzung

Ausgehend von Anfangswerten v_n bzw. w_n ergeben sich durch einen Eulerschritt die Näherungen

$$v_{n+1} = v_n + hf(t_n, v_n),$$
$$w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n).$$



Bildet man die Norm der Differenz so gilt

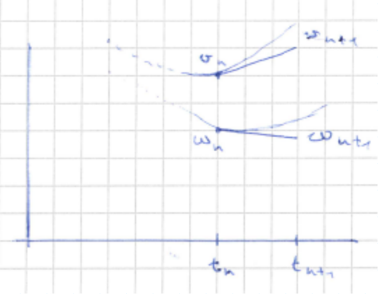
$$\|v_{n+1} - w_{n+1}\| \leq \|v_n - w_n\| + h\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\|$$

.

Fehlerfortpflanzung

Ausgehend von Anfangswerten v_n bzw. w_n ergeben sich durch einen Eulerschritt die Näherungen

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= v_n + hf(t_n, v_n),\\
w_{n+1} &= w_n + hf(t_n, w_n).
\end{aligned}
$$

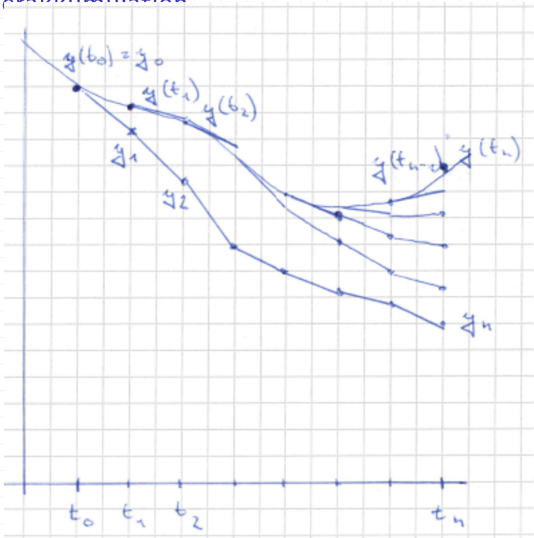


Bildet man die Norm der Differenz so gilt

$$
\begin{aligned}
\|v_{n+1} - w_{n+1}\| &\leq \|v_n - w_n\| + h\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\|\\
&\leq (1 + Lh)\|v_n - w_n\|.
\end{aligned}
$$

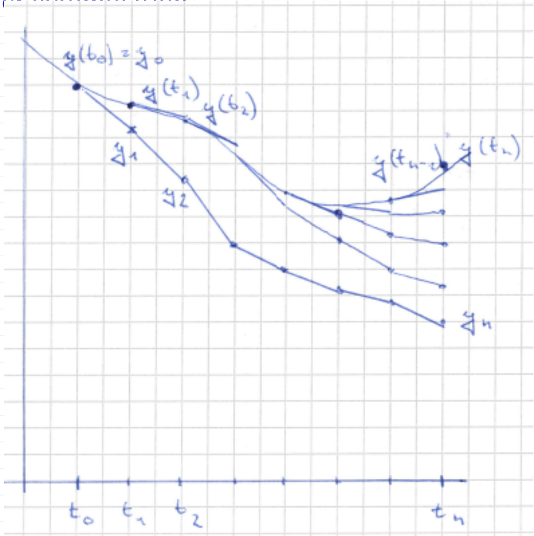
Fehlerakkumulation

Idee:



Fehlerakkumulation

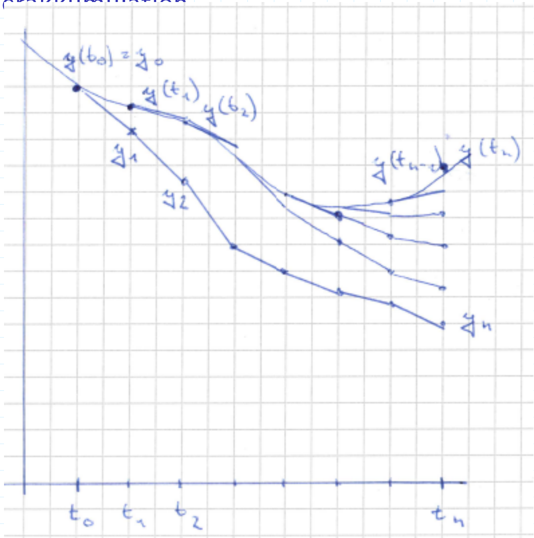
Idee:



Bezeichne mit y_n^k die Näherung an $y(t_n)$ zum Anfangswert $y(t_k)$ nach $(n-k)$ Schritten.

Fehlerakkumulation

Idee:



Bezeichne mit y_n^k die Näherung an $y(t_n)$ zum Anfangswert $y(t_k)$ nach $(n-k)$ Schritten.

Dann ist
$y_k = y_k^0$ und
$y(t_k) = y_k^k$.

Fehlerakkumulation

Nach Schritt 1 : $\|y_{k+1}^k - y_{k+1}^{k+1}\| < Ch^2$

Nach Schritt 2 : $\|y_m^k - y_m^{k+1}\| \leq (1 + hL)\|y_{m-1}^k - y_{m-1}^{k+1}\|$

induktiv erhält man

$$\begin{aligned}
\|y_n^k - y_n^{k+1}\| &\leq (1 + hL)\|y_{n-1}^k - y_{n-1}^{k+1}\| \\
&\leq \dots \\
&\leq (1 + hL)^{n-k-1}\|y_{k+1}^k - y_{k+1}^{k+1}\| \\
&\leq (1 + hL)^{n-k-1} Ch^2.
\end{aligned}$$

Fehlerakkumulation

Damit ist

$$\|y_n - y(t_n)\| = \|y_n^0 - y_n^n\|$$

.

Die vorletzte Ungleichung folgt aus $(1+x) \leq \mathrm{e}^x$, die letzte aus $nh \leq T - t_0$. $\square$

Fehlerakkumulation

Damit ist

$$\begin{aligned}\|y_n - y(t_n)\| &= \|y_n^0 - y_n^n\| \\ &\leq \|y_n^0 - y_n^1\| + \|y_n^1 - y_n^2\| + \cdots + \|y_n^{n-1} - y_n^n\|\end{aligned}$$

$$.$$

Die vorletzte Ungleichung folgt aus $(1+x) \leq \mathrm{e}^x$, die letzte aus $nh \leq T - t_0$. $\square$

Fehlerakkumulation

Damit ist

$$\begin{aligned}\|y_n - y(t_n)\| &= \|y_n^0 - y_n^n\| \\ &\le \|y_n^0 - y_n^1\| + \|y_n^1 - y_n^2\| + \cdots + \|y_n^{n-1} - y_n^n\| \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \|y_n^{\ell-1} - y_n^{\ell}\| \\ &\le Ch^2 \sum_{\ell=1}^{n} (1+hL)^{n-\ell}\end{aligned}$$

.

Die vorletzte Ungleichung folgt aus $(1+x) \le \mathrm{e}^x$, die letzte aus $nh \le T - t_0$. $\square$

Fehlerakkumulation

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\|y_n - y(t_n)\| &= \|y_n^0 - y_n^n\| \\
&\leq \|y_n^0 - y_n^1\| + \|y_n^1 - y_n^2\| + \cdots + \|y_n^{n-1} - y_n^n\| \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \|y_n^{\ell-1} - y_n^{\ell}\| \\
&\leq Ch^2 \sum_{\ell=1}^{n} (1+hL)^{n-\ell} = Ch^2 \frac{(1+hL)^n - 1}{1+hL-1}
\end{aligned}
$$

.

Die vorletzte Ungleichung folgt aus $(1+x) \leq \mathrm{e}^x$, die letzte aus $nh \leq T - t_0$. $\square$

Damit ist

$$\begin{aligned}\|y_n - y(t_n)\| &= \|y_n^0 - y_n^n\| \\ &\le \|y_n^0 - y_n^1\| + \|y_n^1 - y_n^2\| + \cdots + \|y_n^{n-1} - y_n^n\| \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \|y_n^{\ell-1} - y_n^{\ell}\| \\ &\le Ch^2 \sum_{\ell=1}^{n} (1+hL)^{n-\ell} = Ch^2 \frac{(1+hL)^n - 1}{1+hL-1} = Ch \frac{(1+hL)^n - 1}{L}\end{aligned}$$

.

Die vorletzte Ungleichung folgt aus $(1+x) \le \mathrm{e}^x$, die letzte aus $nh \le T - t_0$. $\square$

Fehlerakkumulation

Damit ist

$$\begin{aligned}
\|y_n - y(t_n)\| &= \|y_n^0 - y_n^n\| \\
&\le \|y_n^0 - y_n^1\| + \|y_n^1 - y_n^2\| + \cdots + \|y_n^{n-1} - y_n^n\| \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \|y_n^{\ell-1} - y_n^{\ell}\| \\
&\le Ch^2 \sum_{\ell=1}^{n} (1+hL)^{n-\ell} = Ch^2 \frac{(1+hL)^n - 1}{1+hL-1} = Ch \frac{(1+hL)^n - 1}{L} \\
&\le Ch \frac{e^{nhL} - 1}{L} \le Ch \frac{e^{(T-t_0)L} - 1}{L}.
\end{aligned}$$

Die vorletzte Ungleichung folgt aus $(1+x) \le \mathrm{e}^x$, die letzte aus $nh \le T - t_0$. $\square$

4 Runge-Kutta Verfahren

Runge-Kutta Verfahren

Ziel: Verfahren höherer Ordnung.

Das (explizite) Eulerverfahren hatte nur Ordnung 1.
D.h. der Fehler ist in $\mathcal{O}(h)$.

Herleitung/Motivation

Die exakte Lösung y erfüllt für $t_1 = t_0 + h$

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt.$$

Herleitung/Motivation

Die exakte Lösung y erfüllt für $t_1 = t_0 + h$

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt.$$

Anwendung einer s-stufigen Quadraturformel mit Knoten $c_1, \ldots, c_s$ und Gewichten $b_1, \ldots, b_s$ ergibt:

$$y(t_1) \approx y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h, y(t_0 + c_i h)).$$

Beispiel 4.1 (Mittelpunktsregel)

$s = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = \frac{1}{2}$

$$y(t_1) \approx y(t_0) + hf(t_0 + \tfrac{1}{2}h, y(t_0 + \tfrac{1}{2}h))$$

Wie berechnet man $y(t_0 + \frac{1}{2}h)$?

Beispiel 4.1 (Mittelpunktsregel)

$s = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = \frac{1}{2}$

$$y(t_1) \approx y(t_0) + hf(t_0 + \tfrac{1}{2}h, y(t_0 + \tfrac{1}{2}h))$$

Wie berechnet man $y(t_0 + \frac{1}{2}h)$?
Zum Beispiel mit einem Schritt des expliziten Eulerverfahrens

$$y(t_0 + \tfrac{1}{2}h) \approx y(t_0) + \tfrac{1}{2}hf(t_0, y(t_0))$$

Herleitung/Motivation

In der QF treten also die Werte der unbekannten Lösung an den Stellen $t_0 + c_i h$ auf.

In der QF treten also die Werte der unbekannten Lösung an den Stellen $t_0 + c_i h$ auf.
Zur Approximation von $y(t_0 + c_i h)$ verwenden wir daher erneut die Integraldarstellung der Lösung

$$y(t_0 + c_i h) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0 + c_i h} y'(t)dt = y_0 + \int_{t_0}^{t_0 + c_i h} f(t, y(t))dt.$$

und approximieren die Integrale $\int_{t_0}^{t_0+c_i h} f(t, y(t))dt$ mit Quadraturformeln mit **denselben** Knoten $t_0 + c_i h$ und Gewichten a_{ij} passend zu $\int_0^{c_i}$

$$y(t_0 + c_i h) \approx y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, y(t_0 + c_j h)).$$

Zusammenfassend:

Definition 4.2

Ein Schritt eines Runge-Kutta Verfahren zur Lösung von $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ ist durch

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i Y_i', \\
Y_i' &= f(t_0 + c_i h, Y_i), \qquad \text{für } i = 1, \dots, s \\
Y_i &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} Y_j'.
\end{aligned}
$$

Es ist durch die Koeffizienten a_{ij}, b_i und c_i für $i, j = 1, \dots, s$ gegeben.

Üblicherweise stellt man ein Runge-Kutta Verfahren in einem sog. Butcher Tableau dar:

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{ij} \\ \hline & b_j \end{array}$$

Die Y_is sind im Allgemeinen Lösungen eines nichtlinearen Gleichungssystems.
Falls $a_{ij} = 0$ für $j \geq i$, können die Y_i nacheinander explizit berechnet werden,

for $i = 1$ to s **do**

$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} Y_j'$

$Y_i' = f(t_0 + c_i h, Y_i)$

end for

$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i Y_i'$

Beispiele

Beispiel 4.3 (Explizites Eulerverfahren)

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_0, \\ Y_1' &= f(t_0, Y_1), \\ y_1 &= y_0 + hY_1'. \end{aligned}$$

Der lokale Fehler des expl. Euler-Verfahrens ist in $\mathcal{O}(h^2)$.

Beispiele

Beispiel 4.4 (Runge-Verfahren 1895)

Mittelpunktsregel + expl. Eulerverfahren

$$y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$$

Beispiele

Beispiel 4.4 (Runge-Verfahren 1895)

Mittelpunktsregel + expl. Eulerverfahren

$$y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$$

oder

$$y_1 = y_0 + hY_2'.$$

Beispiele

Beispiel 4.4 (Runge-Verfahren 1895)

Mittelpunktsregel + expl. Eulerverfahren

$$y_1 = y_0 + hf\big(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, y_0)\big)$$

oder

$$\begin{aligned} Y_2 &= y_0 + \tfrac{h}{2} Y_1' & \qquad Y_2' &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_2), \\ y_1 &= y_0 + hY_2'. \end{aligned}$$

Beispiele

Beispiel 4.4 (Runge-Verfahren 1895)

Mittelpunktsregel + expl. Eulerverfahren

$$y_1 = y_0 + hf\big(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, y_0)\big)$$

oder

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_0, & Y_1' &= f(t_0, y_0), \\ Y_2 &= y_0 + \tfrac{h}{2} Y_1' & Y_2' &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_2), \\ y_1 &= y_0 + hY_2'. \end{aligned}$$

Beispiele

Beispiel 4.4 (Runge-Verfahren 1895)

Mittelpunktsregel + expl. Eulerverfahren

$$y_1 = y_0 + hf\big(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, y_0)\big)$$

oder

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_0, & Y_1' &= f(t_0, y_0), \\ Y_2 &= y_0 + \tfrac{h}{2} Y_1' & Y_2' &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_2), \\ y_1 &= y_0 + hY_2'. \end{aligned}$$

Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

lokaler Fehler
(Taylorentw. von $y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0)\right)$ um (t_0, y_0))

lokaler Fehler

(Taylorentw. von $y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$ um (t_0, y_0))

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\left(\partial_t f(t_0, y_0) + D_y f(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right) + \mathcal{O}(h^3)$$

lokaler Fehler
(Taylorentw. von $y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$ um (t_0, y_0))

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left(\partial_t f(t_0, y_0) + D_y f(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right) + \mathcal{O}(h^3)$$

(Taylorentw. von $y(t_0 + h)$ um t_0)

lokaler Fehler
(Taylorentw. von $y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$ um (t_0, y_0))

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left(\partial_t f(t_0, y_0) + D_y f(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right) + \mathcal{O}(h^3)$$

(Taylorentw. von $y(t_0 + h)$ um t_0)

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &= y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(t_0) + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left[\partial_t f(t_0, y_0) + D_y f(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

lokaler Fehler
(Taylorentw. von $y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$ um (t_0, y_0))

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left(\partial_t f(t_0, y_0) + D_y f(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right) + \mathcal{O}(h^3)$$

(Taylorentw. von $y(t_0 + h)$ um t_0)

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &= y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(t_0) + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left[\partial_t f(t_0, y_0) + D_y f(t_0, y_0) f(t_0, y_0)\right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

Bildet man die Differenz so erhält man

$$\|y_1 - y(t_0 + h)\| \in \mathcal{O}(h^3)$$

Beispiele

Beispiel 4.5 (Kutta-Verfahren 1901)

Simpsonregel mit doppeltem Knoten bei $\frac{1}{2}$

Beispiele

Beispiel 4.5 (Kutta-Verfahren 1901)

Simpsonregel mit doppeltem Knoten bei $\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\left(\tfrac{1}{6}Y_1' + \tfrac{1}{3}Y_2' + \tfrac{1}{3}Y_3' + \tfrac{1}{6}Y_4'\right) \\
Y_1' &= f(t_0, Y_1), & Y_1 &= y_0 \\
Y_2' &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_2), & Y_2 &= y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0, Y_1) \\
Y_3' &= f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_3), & Y_3 &= y_0 + \tfrac{h}{2} f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_2) \\
Y_4' &= f(t_0 + h, Y_4), & Y_4 &= y_0 + h f(t_0 + \tfrac{h}{2}, Y_3)
\end{aligned}
$$

Kutta-Verfahren

Butcher Tableau des Kutta Verfahrens

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Der lokale Fehler liegt in $\mathcal{O}(h^5)$ (ohne Beweis)

Beispiele

Beispiel 4.6 (Verfahren von Heun)

$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{2} h f(t_0, y_0) + \tfrac{1}{2} h f(t_0 + h, y_0 + h f(t_0, y_0))$$

Trapezregel + explizites Eulerverfahren für unbekannten inneren Wert

Definition 4.7

Ein Runge-Kutta Verfahren hat Ordnung p

$:\Leftrightarrow$ Für jedes AWP $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$ mit $f \in C^{p+1}$ gilt

$$\|y_1 - y(t_0 + h)\| \in \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ für } h \to 0$$

Hierbei ist y_1 das Ergebnis für eine Schritt des RKV.

Definition 4.7

Ein Runge-Kutta Verfahren hat Ordnung p

$:\Leftrightarrow$ Für jedes AWP $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$ mit $f \in C^{p+1}$ gilt

$$\|y_1 - y(t_0 + h)\| \in \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ für } h \to 0$$

Hierbei ist y_1 das Ergebnis für eine Schritt des RKV.

Beispiel 4.8

explizites Euler Verfahren hat Ordnung 1

Runge Verfahren hat Ordnung 2

Satz 4.9

Sei $f \in C^{p+1}$. Hat das RKV die Ordnung p, dann gilt für den Fehler

$$\|y_n - y(t_n)\| \leq Mh^p,$$

für eine Konstante M unabhängig von n und h mit $t_n = t_0 + nh \in I = [t_0, T]$ ist.

Beweisskizze: vgl. Satz 3.1
a) lokaler Fehler
nach der Definition von Ordnung ist der lokale Fehler $\leq Ch^{p+1}$ Die Abschätzung ist gleichmäßig da $\{y(t) : t \in [0, T]\}$ kompakt.

b) Fehlerfortplanzung

$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$

Φ ist Lipschitzstetig

c) Fehlerakkumulation wie in Satz 3.1

Definition 4.10

Runge-Kutta Verfahren die nicht explizit sind heißen implizite Runge-Kutta Verfahren

Beispiel 4.11 (implizites Euler Verfahren)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Implizite Runge-Kutta Verfahren

Definition 4.10

Runge-Kutta Verfahren die nicht explizit sind heißen implizite Runge-Kutta Verfahren

Beispiel 4.11 (implizites Euler Verfahren)

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\
&= y_n + hb_1 f(t_n + c_1 h, Y_1)
\end{aligned}
$$

Versuch $s = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = 1,\ a_{11} = 1$

Implizite Runge-Kutta Verfahren

Definition 4.10

Runge-Kutta Verfahren die nicht explizit sind heißen implizite Runge-Kutta Verfahren

Beispiel 4.11 (implizites Euler Verfahren)

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= y_n + hb_1 f(t_n + c_1 h, Y_1) \end{aligned}$$

Versuch $s = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 1$, $a_{11} = 1$

$$Y_1 = y_n + hf(t_n + h, Y_1) = y_n + hY_1'$$

Beispiel 4.12 (Mittelpunktsregel)

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Beispiel 4.12 (Mittelpunktsregel)

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Versuch $s = 1,\ c_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = 1$

Beispiel 4.12 (Mittelpunktsregel)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$$

Versuch $s = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$

$$Y_1 = y_n + ha_{11} f(t_n + \tfrac{h}{2}, Y_1)$$

Dann erfüllt $Y_1 = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n+1}$ für $a_{11} = \frac{1}{2}$

Beispiel 4.12 (Mittelpunktsregel)

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Versuch $s = 1,\ c_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = 1$

$$Y_1 = y_n + ha_{11} f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, Y_1\right)$$

Dann erfüllt $Y_1 = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n+1}$ für $a_{11} = \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1} = y_n + h\tfrac{1}{2} f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1}\right)$$

Beispiel 4.12 (Mittelpunktsregel)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$$

Versuch $s = 1,\ c_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = 1$

$$Y_1 = y_n + ha_{11} f(t_n + \tfrac{h}{2}, Y_1)$$

Dann erfüllt $Y_1 = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n+1}$ für $a_{11} = \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1} = y_n + h\tfrac{1}{2}f(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}y_{n+1} = \tfrac{1}{2}y_n + h\tfrac{1}{2}f(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1})$$

obige Gleichung $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$

Beispiel 4.12 (Mittelpunktsregel)

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Versuch $s = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$

$$Y_1 = y_n + ha_{11}f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, Y_1\right)$$

Dann erfüllt $Y_1 = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n+1}$ für $a_{11} = \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1} = y_n + h\tfrac{1}{2}f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}y_{n+1} = \tfrac{1}{2}y_n + h\tfrac{1}{2}f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1}\right)$$

obige Gleichung $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$ und damit

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \tfrac{h}{2}, Y_1\right)$$